

Cuadernillo de Matemática

Curso de nivelación 2024

Programa

Unidad 1

Los Números Reales. Ampliación de los Conjuntos Numéricos. Operaciones. Propiedades.

Proporcionalidad numérica. Razones. Proporciones. Propiedad Fundamental de las Proporciones. Aplicaciones: Porcentaje; Regla de Tres Simple, directa e inversa. Resolución de Problemas.

Unidad 2

Figuras Geométricas Planas. Clasificación. Características. Perímetro. Área. Propiedades.

Cuerpos Geométricos. Área. Volumen.

Unidades Agrarias. Relación entre las Unidades de Capacidad y Volumen..

Resolución de Ejercicios.

Unidad 3

Trigonometría. Sistemas de Medición de Ángulos. Razones Trigonométricas.

Teorema de Pitágoras. Resolución de Triángulos Rectángulos. Teorema del Seno y del Coseno de un ángulo. Resolución de Triángulos Oblicuángulos. Relación entre las Razones Trigonométricas de un mismo ángulo. Resolución de Problemas.

Unidad 4

Ecuaciones. Concepto. Grado de una Ecuación. Secuencia para la Resolución de Problemas.

Ecuación de Primer Grado con una Incógnita. Expresión General. Ecuación de Segundo Grado. Expresión General. Raíces. Discriminante. Resolución de Problemas.

Sistemas de Ecuaciones. Métodos de Resolución: Gráfico y Analíticos: Igualación, Sustitución y Determinantes. Resolución de Problemas.

Unidad 5

Sistema de Coordenadas Cartesianas. Par Ordenado. Interpretación de Gráficos.

Funciones. Definición. Función Creciente, Decreciente, Constante. Máximos, Mínimos y Ceros.

Funciones dadas por Fórmulas. Función Afín. Características. Representación

Gráfica. Función Cuadrática. Características. Representación Gráfica. Expresión Canónica, Polinómica y Factorizada.

Resolución de Ejercicios y Problemas.

Bibliografía

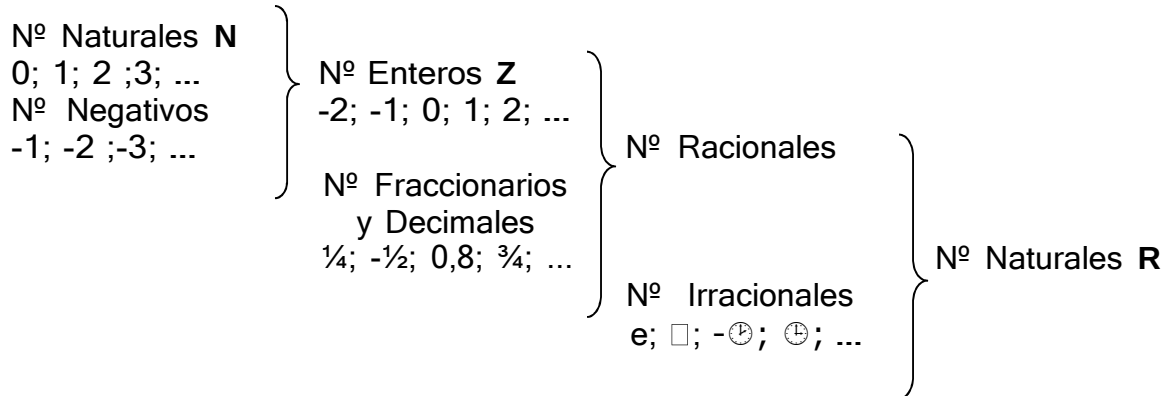
- MATEMÁTICA DE 9º EGB; Margarita Rodríguez, Miguel Martínez; Mc Graw Hill.
- MATEMÁTICA 2, Nelly Vázquez de Tapia, Alicia Tapia de Biblioni, Carlos Tapia; Estrada.
- MATEMÁTICA ACTIVA; Liliana Laurito, Laura B. de Stisin, Eduardo Trama, Dora Zuger, Estela Sidelsky; Puerto de Palos.
- MATEMÁTICA 1 ACTIVA; Adriana Berio, María Lucila Colombo, Carina D'Albano, Oscar Sardella, Irene Zapico; Puerto de Palos.
- MATEMÁTICA DE 9º EGB SERIE CLAVE; Marina Andrés, Pablo Kaczor, María Celina Latorre, Gustavo Piñeiro; Santillana.
- MATEMÁTICA 1, Pablo Kaczor, Ruth Schaposchnik, Eleonora Franco, Rosa Cicala, Bibiana Díaz; Santillana.

Cuadernillo elaborado por Prof. Claudia García.

Corregido por Prof. Alberto Yebra.

Unidad 1

Los Números Reales . Operaciones. Propiedades



Adición. Propiedades

- Asociativa:
 $(a+b)+c=a+(b+c)$
- Conmutativa:
 $a+b=b+a$
- Elemento Neutro:
 $a+0=a$
- Elemento Opuesto:
 $a+(-a)=0$

Multiplicación. Propiedades

- Asociativa:
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Conmutativa:
 $a \cdot b = b \cdot a$
- Elemento Neutro:
 $a \cdot 1 = a$
- Elemento Inverso para $a \neq 0$:

$$\frac{1}{a} \cdot a = 1$$

- Distributiva
 $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Potenciación

$$a^0=1 \quad a^1=a \quad a^{-n}=(1/a)^n$$

$$a \neq 0$$

- Distributiva
 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
 $(a : b)^n = a^n / b^n$
- Producto de potencias de igual base
 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- Cociente de potencias de igual base
 $a^x : a^y = a^{x-y}$
- Potencia de potencias
 $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- Regla de signos

Base	Exponente	Potencia
+	Par	+
-	Par	+
+	Impar	+
-	Impar	-

Radicación

$$\text{índice} \sqrt[n]{a} = b \quad \text{raíz}$$

radicando

- Distributiva
 $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
 $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$
- Raíz de raíz
 $\sqrt[a]{\sqrt[b]{n}} = \sqrt[a \cdot b]{n}$
- Regla de signos

Índice	Radical	Raíz
Impar	+	+
Impar	-	-
Par	+	+ y -
Par	-	No tiene solución en $\mathbb{R}$

Razones. Proporciones: propiedades, problemas. Porcentaje. Regla de Tres Simple. Problemas.

Se denomina **razón** entre dos números racionales, **a** y **b**, al cociente entre ellos, siendo $b \neq 0$.

Ejemplo:

$$7/4=1,75$$

$$5/2=2,5$$

$$3/10=0,3$$

Cuatro números racionales **a**, **b**, **c**, **d** (con $b \neq 0$ y $d \neq 0$), forman una **proporción**, si la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos segundos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Se lee **a** es a **b** como **c** es a **d**

a;d extremos
b;c medios

Ejemplo:

$$\frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{18}{6} = \frac{9}{3}$$

Propiedad fundamental de las proporciones: En toda proporción se cumple que el producto de los **medios** es igual al producto de los **extremos**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Aplicaciones

Se utilizan también las proporciones para calcular **porcentaje** y resolver problemas de **regla de tres simple**.

Porcentaje

En los porcentajes, se hace una referencia de cierta cantidad de una determinada magnitud, respecto una cantidad de 100 unidades respecto de otro magnitud.

Se aplica como beneficio o perjuicio, cuando hacemos referencia a transacciones económicas (compra, venta, pago de préstamos, etc). Como beneficio es el caso del descuento que se aplica cuando se realiza una compra al contado o los intereses que produce el dinero en una cuenta bancaria. Como perjuicio, es el caso de recargos, por ejemplo, cuando se realiza el pago en cuotas o cuando se pagan impuestos o servicios fuera de término, etc. Cuando es un beneficio, se resta, en caso de perjuicio, se suma a la cantidad base.

Ejemplo: Calcular el 23% de \$75.

$$\begin{array}{rcl} 100\% & \text{-----} & \$7500 \\ 23\% & \text{-----} & \$x \end{array} \quad \frac{100}{23} = \frac{7500}{x}$$

$$x = \frac{23 \cdot 7500}{100}$$

$$x = 1725$$

Luego, el 23% de \$7500, es \$1725.

Si fuera descuento, se resta: $7500 - 1725 = 5775$

Si fuera recargo, se suma: $7500 + 1725 = 9225$

Regla de tres simple

Los problemas en los que intervienen magnitudes que son proporcionales entre sí, se denominan de **regla de tres simple**.

Cuando las magnitudes son directamente proporcionales, el problema es de **regla de tres simple directa**; cuando son inversamente proporcionales, es de **regla de tres simple inversa**.

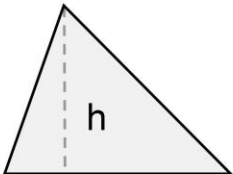
Unidad 2

Figuras Planas. Perímetro. Área.

Triángulos

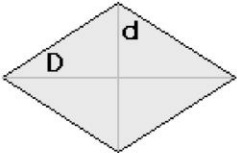
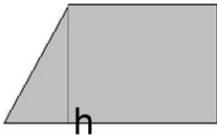
Son polígonos convexos de tres lados, se pueden clasificar según sus lados y según sus ángulos.

Lados	Equilátero: tres lados iguales.	Ángulos	Acutángulo: tres ángulos agudos.
	Escaleno: tres lados desiguales.		Obtusángulo: un ángulo obtuso.
	Isósceles: dos lados iguales.		Rectángulo: un ángulo recto.

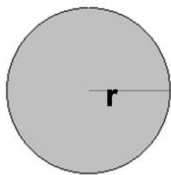
Figura	Perímetro	Área
	$p = l + l + l$	$a = \frac{b \cdot h}{2}$

Cuadriláteros

Son polígonos convexos y se clasifican según sus lados.

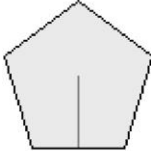
Figura	Características	Perímetro	Área
	Cuadrado: es rectángulo y rombo	$p = l \cdot 4$	$a = l^2$
	Rombo: cuatro lados iguales	$p = l \cdot 4$	$a = \frac{d \cdot D}{2}$
	Rectángulo: cuatro ángulos iguales	$p = l \cdot 2 + l' \cdot 2$	$a = b \cdot h$
	Trapezio: un par de lados paralelos	$p = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$	$a = \frac{(b+b') \cdot h}{2}$

Circunferencia. Círculo

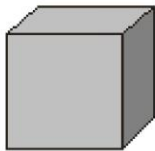
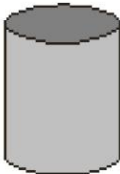
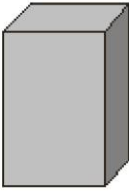
	$d = 2 \text{ radios}$	$p = 2 \pi \cdot r$ $p = \pi \cdot d$	$a = \pi \cdot r^2$
---	------------------------	--	---------------------

Polígono regular:

Todos sus lados y ángulos son iguales

	apotema: perpendicular del centro del polígono a cualquiera de sus lados	$p = n \cdot l$ n : número de lados	$a = \frac{p \cdot \text{apot.}}{2}$ p : perímetro
---	--	--	---

Cuerpos. Área. Volumen.

Cubo	Esfera	Cilindro	Paralelepípedo
			
$a = l^2 \cdot 6$	$a = 4\pi \cdot r^2$	$a = 2\pi \cdot r \cdot (h+r)$	$a = \text{per. base} \cdot h + 2 \text{ sup. base}$
$v = l^3$	$v = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$	$v = \pi \cdot r^2 \cdot h$	$v = \text{sup. base} \cdot h$

Unidades de Capacidad y Volumen: Relación.

Capacidad	1 kl	1 l	1 ml
Volumen	1 m ³	1 dm ³	1 cm ³

Unidades Agrarias.

Su uso se ha impuesto para la medición de campos.

hectárea	ha	hm ²	10.000 m ²
área	a	dam ²	100 m ²
centiárea	ca	m ²	1 m ²

Unidad 3

Trigonometría.

La trigonometría se ocupa de relacionar las medidas de los lados de un triángulo con sus ángulos, es de mucha utilidad cuando se trata de medir longitudes inaccesibles al ser humano, como por ejemplo: alturas de montañas, torres, ancho de ríos, etc.

Sistema de Medición de Ángulos

Para medir ángulos se utilizan generalmente dos sistemas de medición:

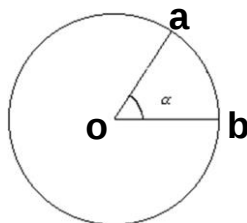
Sistema Sexagesimal:

La unidad de medida es el **grado sexagesimal** (1°), se obtiene al dividir un ángulo recto en 90 partes iguales.

$$1^\circ = \frac{1 \text{ R}}{90} \quad \square \quad 1 \text{ R} = 90^\circ$$

Sistema Circular:

La unidad de medida es el **radián** y es el ángulo que abarca un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma. Un ángulo de giro es de 2π **radianes**.



$$\begin{aligned} r &= ob \\ ab &= ob \\ \square &= 1 \text{ radián} = \frac{ab}{ob} \end{aligned}$$

Equivalencias entre ambos Sistemas.

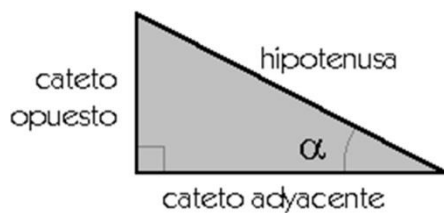
Sistema Sexagesimal	Sistema Circular
90°	$\pi / 2$
180°	π
360°	2π

Razones Trigonométricas

Se denominan **razones trigonométricas** a las razones que relacionan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con las amplitudes de los ángulos agudos del mismo. Estas razones son: **seno**, **coseno** y **tangente** y dependen únicamente de la amplitud del ángulo considerado.

Para definir estas razones, en un triángulo rectángulo, se tendrá en cuenta: la **hipotenusa**, se identifica como el lado opuesto al ángulo recto; los **catetos opuesto** y **adyacente** dependerán del ángulo agudo con el que se trabaje.

Las razones trigonométricas se definen de la siguiente manera:



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Estas razones trigonométricas permiten resolver triángulos rectángulos: conocer las amplitudes de sus ángulos agudos y las longitudes de sus lados.

Para resolver triángulos rectángulos se tendrá en cuenta:

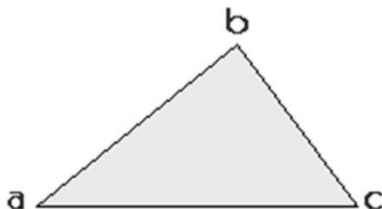
- que la suma de las amplitudes de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de 90°
- el **Teorema de Pitágoras**: el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Teorema del Seno y del Coseno

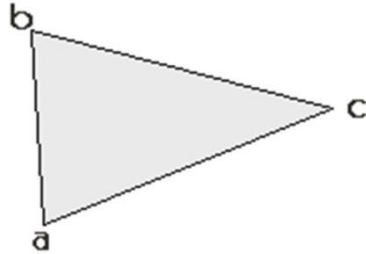
Estos teoremas relacionan las longitudes de los lados de cualquier triángulo con las amplitudes de sus ángulos interiores.

- **Teorema del Seno**: en todo triángulo sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos



$$\frac{a}{\text{sen } c} = \frac{b}{\text{sen } a} = \frac{c}{\text{sen } b}$$

- **Teorema del Coseno:** el cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman.



$$bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2 \cdot ab \cdot ac \cdot \cos a$$

$$ac^2 = ab^2 + bc^2 - 2 \cdot ab \cdot bc \cdot \cos b$$

$$ab^2 = ac^2 + bc^2 - 2 \cdot ac \cdot bc \cdot \cos c$$

Estos teoremas permiten resolver triángulos oblicuángulos (no tienen ningún ángulo recto), para dicha resolución además de los teoremas mencionados se utiliza la siguiente propiedad de los triángulos: “la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es 180°”

Relación entre las Razones Trigonométricas de un mismo Ángulo

$$\operatorname{cosec} \square = \frac{1}{\operatorname{sen} \square}$$

$$\sec \square = \frac{1}{\cos \square}$$

$$\cotg \square = \frac{1}{\operatorname{tg} \square}$$

$$\operatorname{tg} \square = \frac{\operatorname{sen} \square}{\cos \square}$$

$$\operatorname{sen}^2 \square + \cos^2 \square = 1 \quad \text{relación pitagórica.}$$

Unidad 4

Ecuaciones. Sistema de Ecuaciones.

Una **ecuación** es una igualdad que contiene, al menos, un valor desconocido que se denomina **incógnita**, esta se representa mediante letras. El grado de una ecuación es el mayor exponente al que aparece elevada la incógnita:

$2x+13/5=17$ ecuación de 1º grado.

$4x^2-7/2x=6/5$ ecuación de 2º grado.

Resolver una ecuación significa hallar el o los valores de las incógnitas que hacen cierta la igualdad. Estos valores se denominan **soluciones** de la ecuación. Para resolver una ecuación se procede de la siguiente manera:

- ❖ se separa en términos y se resuelven todas las operaciones posibles
- ❖ se reúnen en un mismo miembro, los términos en los que figuran las incógnitas y en el otro miembro los términos independientes
- ❖ se efectúan las reducciones en ambos términos

Las ecuaciones y los sistemas, tanto en Matemática como en otras ciencias, se aplican como una herramienta eficaz para la resolución de problemas. Para resolver dichos problemas utilizando ecuaciones o sistemas se procede de la siguiente manera:

1. **Comprender el enunciado del problema:** se debe leer el problema las veces que sea necesario, distinguiendo la incógnita (es lo que se desea averiguar) de los datos.
2. **Plantear la ecuación:** convertir el enunciado del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico, es decir, traducir cómo se relaciona la/s incógnita/s con los datos.
3. **Resolver la ecuación.**
4. **Comprobar la solución obtenida:** comprobar si la/s solución/es obtenida/s, satisface/n las condiciones del enunciado del problema.

Ecuaciones de 1º grado con una incógnita

La expresión general de la ecuación de 1º grado es: $a \cdot x + b = 0$ siendo a y b números reales y $a \neq 0$.

Ejemplos:

a) La mitad de un número más la tercera parte de su consecutivo es 17/6. ¿De qué número se trata?

$$x/2 + 1/3 (x+1) = 17/6$$

$$x/2 + x/3 + 1/3 = 17/6$$

$$x/2 + x/3 = 17/6 - 1/3$$

$$5/6 \cdot x = 15/6$$

$$x = 15/6 \cdot 6/5$$

$$x = 3$$

$$S = \{ 3 \}$$

Respuesta: el número es 3

También puede suceder, que un problema no tenga solución o que tenga infinitas soluciones.

Ecuaciones de 2º grado

La expresión general de una ecuación de 2º grado es:

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ donde a, b, c son n° reales y $a \neq 0$

a : coeficiente del término cuadrático

b : coeficiente del término lineal

c : término independiente

Los valores de x que verifican la ecuación (raíces) se obtienen aplicando una fórmula en la que intervienen los coeficientes de dicha ecuación.

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En ésta fórmula hay una raíz cuadrada, si el radicando es negativo ésta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Discriminante

La expresión $b^2 - 4ac$ permite determinar el tipo de raíces que tiene la ecuación cuadrática, por eso se denomina **discriminante** y se simboliza con la letra griega delta " Δ "

❖ Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene 2 raíces **reales distintas**

❖ Si $\Delta < 0$ la ecuación tiene 2 raíces **reales iguales**

❖ Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene 2 raíces **complejas conjugadas**

Ejemplo:

Calcula el número natural cuyo cuadrado más su triplo da como resultado 40.

$$x^2 + 3x = 40$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$a=1 \quad b=3 \quad c=-40$$

$$x_1; x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-3 \pm 13}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 13}{2} = 5$$

$$x_1; x_2 = \frac{-3 \pm 13}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - 13}{2} = -8$$

$$S = \{ 5; -8 \}$$

Respuesta: el número natural es 5.

Sistema de Ecuaciones

Dos ecuaciones de 1º grado con dos incógnitas cada una, consideradas de forma simultánea (la x e y aluden a la misma incógnita), constituyen un **sistema de dos ecuaciones lineales con 2 incógnitas**. Resolver el sistema es hallar, cuando existen, los valores de las incógnitas que verifican las dos igualdades simultáneamente.

Los sistemas se clasifican en **compatibles** e **incompatibles** según tengan o no solución. Los sistemas compatibles pueden ser **determinados** o **indeterminados** según tengan una o infinitas soluciones.

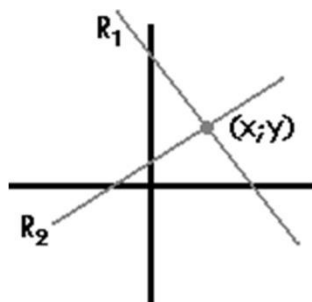
Para resolver éstos sistemas de ecuaciones existen métodos analíticos y gráficos.

Resolución Gráfica:

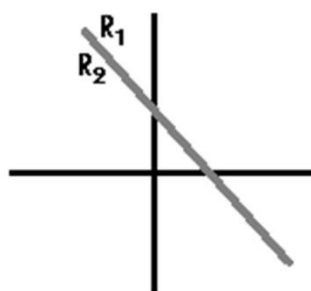
Cada una de las ecuaciones lineales se puede asociar a una función afín, cuya representación gráfica es una recta. Resolver el sistema significa hallar la intersección de ambas rectas.

Para resolver gráficamente un **sistema de ecuaciones**, se transforman ambas ecuaciones en otras equivalentes en función de la incógnita y , se representan luego en un mismo sistema de coordenadas cartesianas y se halla la intersección entre ambas rectas, que es la solución del sistema:

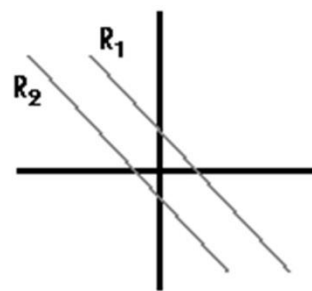
rectas secantes	rectas paralelas coincidentes	rectas paralelas disjuntas
única solución	infinitas soluciones	no tiene solución
sistema compatible determinado	sistema compatible indeterminado	sistema incompatible



$$R_1 \cap R_2 = (x; y)$$



$$R_1 \cap R_2 = R_1 = R_2$$



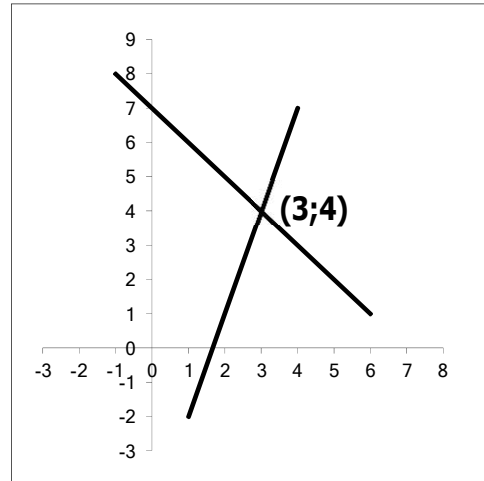
$$R_1 \cap R_2 = \emptyset$$

Ejemplo:

Calcula los números que cumplen con la siguiente condición: el triple de uno de ellos disminuido en el otro es 5 y la suma de ambos números es 7.

$$\begin{cases} 3.x - y = 5 & y = 3.x - 5 \\ x + y = 7 & y = 7 - x \end{cases}$$

$$S = \{(3; 4)\}$$

**Resolución Analítica:****1) Método de igualación**

$$\begin{cases} 3.x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3.x - y &= 5 \\ y &= 3.x - 5 \end{aligned} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ y &= -x + 7 \end{aligned} \quad \textcircled{2}$$

se despeja la misma incógnita (x o y) de ambas ecuaciones (en este ejemplo se despeja y)

$$\begin{aligned} 3.x - 5 &= -x + 7 \\ 3.x + x &= 7 + 5 \\ 4.x &= 12 \\ x &= 12/4 \\ \boxed{x = 3} \end{aligned}$$

se igualan las ecuaciones $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$, y se resuelve la ecuación con una incógnita que queda planteada, obteniendo el valor de una de las dos incógnitas (en este ejemplo se obtiene el valor de x)

$$\begin{aligned} y &= 3.x - 5 \\ y &= 3 \cdot 3 - 5 \\ y &= 9 - 5 \\ \boxed{y = 4} \end{aligned}$$

se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones $\textcircled{1}$ o $\textcircled{2}$, el valor de la incógnita que acabamos de calcular (x), quedando una ecuación que nos permite hallar el valor de la otra incógnita (y)

$$S = \{(3; 4)\}$$

2) Método de sustitución

$$\begin{cases} 3.x - y = 5 & \textcircled{1} \\ x + y = 7 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3.x - y &= 5 \\ y &= 3.x - 5 & \textcircled{3} \end{aligned}$$

se despeja una de las incógnitas (x o y) en una de las ecuaciones (en este ejemplo se despeja "y" de $\textcircled{2}$)

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ x + 3.x - 5 &= 7 \\ 4.x - 5 &= 7 \\ 4.x &= 7 + 5 \\ x &= 12/4 \\ \boxed{x = 3} \end{aligned}$$

se sustituye el valor de esta expresión equivalente a una incógnita (y) en la otra ecuación original ($\textcircled{1}$), y se resuelve hallando el valor de la otra incógnita (x)

$$\begin{aligned} y &= 3.x - 5 \\ y &= 3 \cdot 3 - 5 \\ y &= 9 - 5 \\ \boxed{y = 4} \end{aligned}$$

se reemplaza el valor de la incógnita hallada (x) en la ecuación $\textcircled{1}$, obteniendo el valor de la primera incógnita (y)

$$S = \{(3; 4)\}$$

3) Método de determinantes

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = k_1 \\ a_2 x + b_2 y = k_2 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{k_1 b_2 - k_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 k_2 - a_2 k_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$1 \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot 1 - 7 \cdot (-1)}{3 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)} = \frac{5+7}{3+1} = \frac{12}{4} = 3$$

$$1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot 7 - 1 \cdot 5}{3 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)} = \frac{21-5}{3+1} = \frac{16}{4} = 4$$

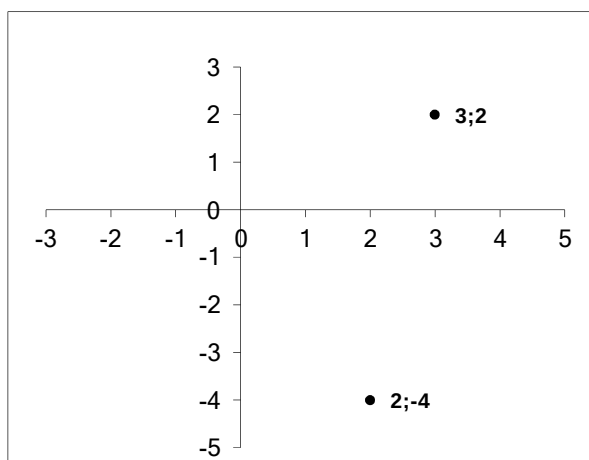
$$S = \{(3; 4)\}$$

Unidad 5

Funciones

Sistema de Coordenadas Cartesianas. Par Ordenado.

Para ubicar puntos en el plano, se utiliza un sistema de ejes cartesianos; son dos rectas perpendiculares entre sí. La recta horizontal se denomina **eje de abscisas** y se simboliza con la letra x , la vertical **eje de ordenadas** y se simboliza con la letra y . El punto de intersección de ambos ejes es el **origen de coordenadas** y es el punto de coordenadas $(0;0)$



Cada punto en el plano queda determinado por un par ordenado, donde la primera componente representa a la abscisa y la segunda componente representa a la ordenada.

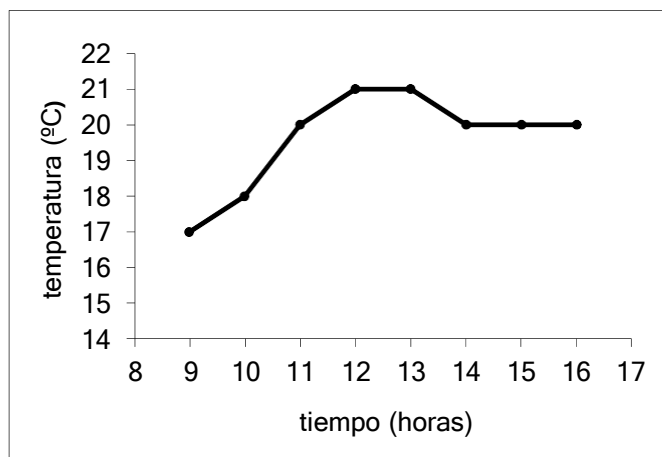
Las escalas utilizadas para graduar cada eje pueden ser distintas por conveniencia y/o necesidad, pero debe respetarse siempre la unidad elegida.

Interpretación de Gráficos

A las relaciones entre dos variables se las puede representar en una tabla y en un sistema de coordenadas cartesianas. Los gráficos sirven para poder analizar los cambios ocurridos entre las variables, éstos brindan información muy útil, pues permiten sacar conclusiones de manera rápida. Sólo se trata de aprender a mirar y analizar.

En cada eje se representan los valores de cada una de las variables, en el eje horizontal la variable independiente y en el eje vertical la variable dependiente.

Interpretar un gráfico es analizar los cambios de la variable dependiente en relación con los de la variable independiente.



Este gráfico muestra la variación de la temperatura ambiental entre las 9 y las 16hs. de un día del mes de setiembre (cambio de T° en relación al tiempo transcurrido).

Observándolo, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- La temperatura a las 9 era de 17°C , y aumentó con el transcurso del tiempo, hasta llegar a 21°C a las 12.
- A partir de las 12 se mantuvo constante durante una hora, disminuyendo 1°C , la siguiente hora.
- Durante las dos horas siguientes se mantuvo constante y a las 16, la temperatura fue de 20°C .
- El mayor aumento de la temperatura se registró entre las 10 y 11.

Funciones

Se denomina **función** a toda relación entre los elementos de dos conjuntos A y B, de modo que a todo elemento x perteneciente al conjunto A, le corresponde **un y sólo un** elemento del conjunto B, llamado imagen de x, a través de la función f. El esquema funcional es el siguiente:

$$f: A \rightarrow B \text{ es función de A en B} \quad \begin{matrix} x \in A & y \in B \\ & \text{imagen de } x \end{matrix} \quad y = f(x)$$

Resumiendo: para que una relación sea función debe cumplir las siguientes condiciones:

- ✦ **Existencia:** todo elemento del primer conjunto tiene que tener imagen en el segundo conjunto.
- ✦ **Unicidad:** que esa imagen sea única.

El **Dominio** (D_m) de una función es el conjunto formado por los elementos del conjunto A que tienen imagen en el conjunto B.

El conjunto **Imagen** (I_m) de una función, es el conjunto formado por los elementos del conjunto B que son imagen de algún elemento del conjunto A.

Las funciones se designan con letras minúsculas: f, g, h.

Las funciones se pueden representar mediante una tabla, un gráfico, un diagrama de Venn y en algunos casos, mediante una fórmula.

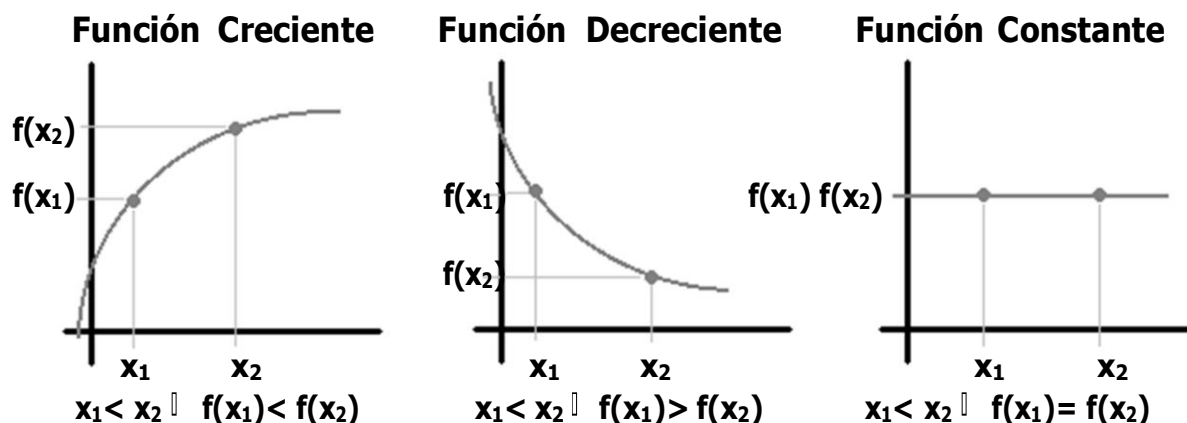
Función Creciente, Decreciente, Constante

Una función es **creciente** cuando al aumentar la variable x, también aumenta la variable y.

Una función es **decreciente** cuando al aumentar la variable x , la variable y disminuye.

Una función es **constante**, si al aumentar la variable x , la variable y se mantiene constante.

Una función puede presentar intervalos de crecimiento de decrecimiento y otros en los que sea constante.

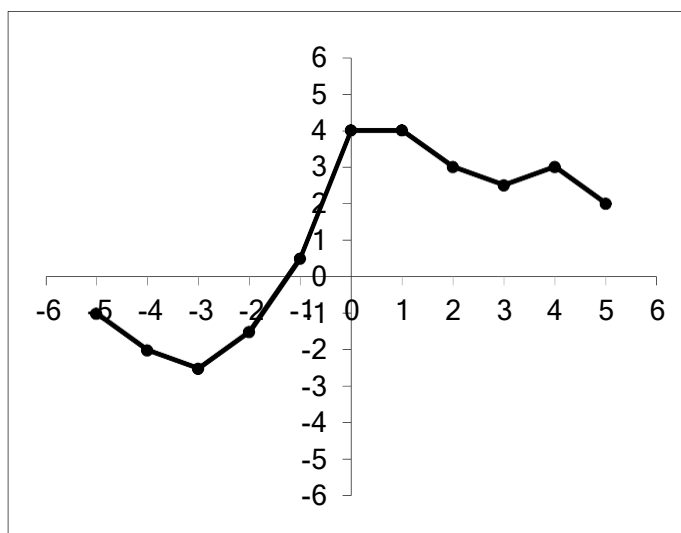


Máximos, Mínimos y Ceros de una Función

Los **ceros o raíces** de una función son los valores de x para los cuales se cumple que: $f(x)=0$. Gráficamente, son los puntos de la gráfica que intersectan al eje x .

El **máximo relativo** de una función es el punto donde la gráfica de la función pasa de ser creciente a ser decreciente.

El **mínimo relativo** de una función es el punto donde la gráfica de la función pasa de ser decreciente a ser creciente.



Funciones dadas por Fórmulas

Una función dada a través de una **fórmula** sirve para calcular cada valor de **y** a partir del correspondiente valor de **x**, donde **x** es la **variable independiente** e **y** la variable **dependiente**.

Se grafican, generalmente, mediante al elaboración de una tabla de valores.

Función Afín

La función polinómica de primer grado $f(x)=a \cdot x +b$, siendo **a** y **b** números reales, se denomina **función afín**.

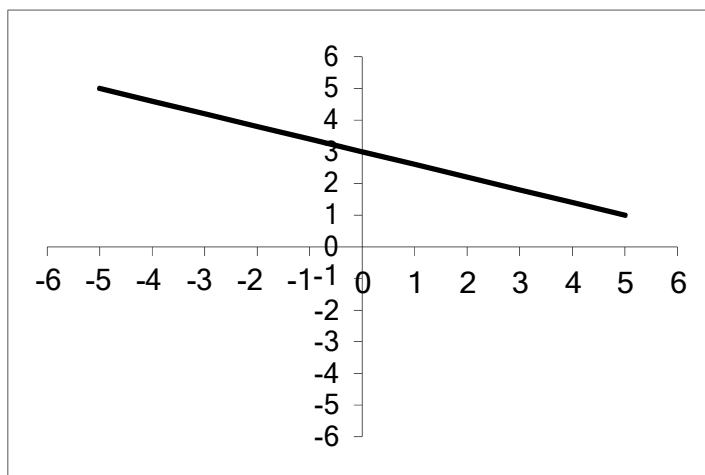
La representación gráfica de esta función es una **recta**. Si la recta pasa por el **origen de coordenadas** la función se denomina **lineal**. Si $a=0$, la función es **constante**.

“**a**”, se denomina **pendiente** de la recta, y es la inclinación de la recta respecto del eje x o el cociente entre la variación de **y** y **x**.

“**b**”, se denomina **ordenada al origen**, y es el punto de intersección de la recta con el eje y

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad b = f(0)$$

Representación Gráfica de la Función Afín



$$y = -2/5 x + 3$$

$$a = -2/5$$

$$b = 3$$

Para representar ésta función de manera rápida se procede de la siguiente manera:

- Se ubica la ordenada al origen sobre el eje y.
- Luego a partir de éste punto se marca la pendiente, teniendo en cuenta la fracción equivalente a dicha pendiente. Si la pendiente es **positiva**, desde el punto del gráfico que representa a la “ordenada al origen”, ubicado sobre el eje “y”, se suben tantas unidades como indica el numerador de la pendiente y nos desplazamos a la derecha tantas unidades como indica el denominador de la pendiente, hallando en éste último un punto de la recta. Si la pendiente es de signo negativo, , desde el punto del gráfico que representa a la “ordenada al origen”, ubicado sobre el eje “y”, se bajan tantas unidades como indica el numerador de la pendiente y nos desplazamos a la derecha tantas unidades como

indica el denominador de la pendiente, hallando en éste último un punto de la recta.

- Este proceso se repite varias veces, obteniendo una sucesión de puntos que pertenecen al gráfico de la función afín
- Se unen todos estos puntos, obteniendo la representación gráfica de la función afín.

Función Cuadrática

La función polinómica de segundo grado $f(x)=a \cdot x^2+b \cdot x+c$, donde a , b y c números reales con $a \neq 0$, se denomina **función cuadrática**

a: coeficiente del término cuadrático

b: coeficiente del término lineal

c: término independiente

La representación gráfica de una función cuadrática es una curva que se denomina **parábola**, ésta curva es simétrica respecto de un eje que se denomina **eje de simetría**.

Representación Gráfica de la Parábola

Para facilitar la representación gráfica se utilizará:

- la ecuación del eje de simetría;

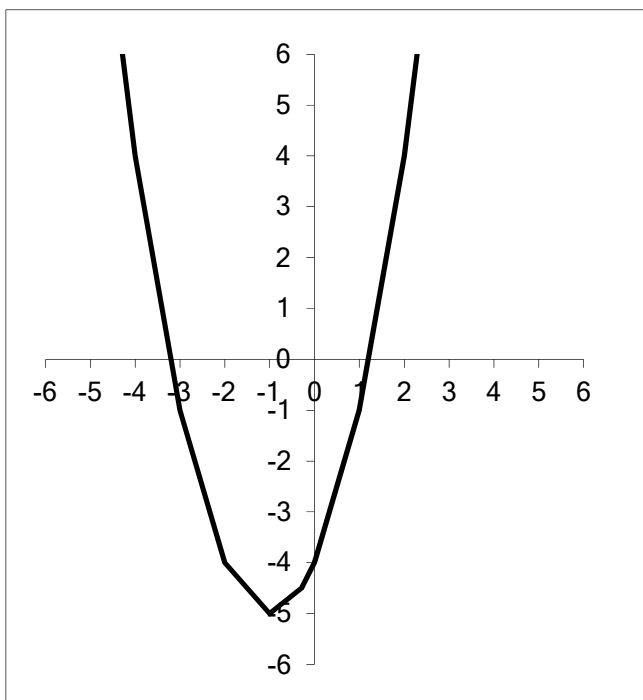
$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad \text{ecuación del eje de simetría}$$

- las coordenadas del vértice

V(x_v ; $f(x_v)$) **coordenadas del vértice**

- las raíces se determinan resolviendo la ecuación de segundo grado, que se obtiene al hacer " $y = 0$ "
- podemos realizar una tabla de valores, dando a la variable " x " valores simétricos respecto del x_v , ya que para ambos valores de " x ", les corresponde el mismo valor de " y ".
- el valor del término independiente " c " es la ordenada al origen.
- el valor de " a " indica:
 - ✦ si es positivo, las ramas de la parábola están orientadas en el sentido positivo del eje y
 - ✦ si es negativo, las ramas de la parábola están orientadas en el sentido negativo del eje y

Ejemplo:



$$f(x) = x^2 + 2x - 4$$

$$a=1$$

$$b=2$$

$$c=-4$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = -1$$

$$V(x_1; f(x_1)) = (-1; -5)$$

$$y = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 4$$

$$y = -5$$

x	y
-1	-5
-2	-4
0	-4
-3	-1
1	-1
-4	4
2	4

Como vemos, a valores simétricos respecto de x_v , para ambos le corresponde la misma ordenada “y”

Los valores que toma x cuando $y=0$ se denominan “raíces o ceros de la función”. En ejes cartesianos corresponde a los puntos donde la gráfica de la función interseca al eje x . Para calcular estos valores, debemos aplicar una fórmula en la que intervienen los coeficientes “a”, “b” y “c” de dicha función.

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En ésta fórmula hay una raíz cuadrada, el radicando se denomina “DISCRIMINANTE”.

Discriminante

La expresión $b^2 - 4ac$ permite determinar el tipo de raíces que tiene la función cuadrática, por eso se denomina **discriminante** y se simboliza con la letra griega delta Δ

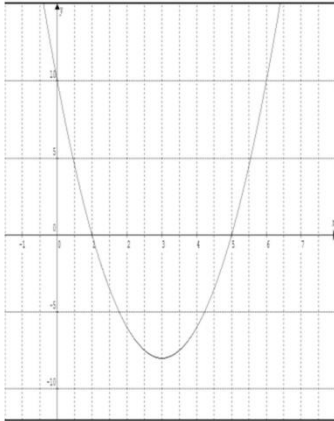
❖ Si $\Delta > 0$ la función tiene 2 raíces **reales distintas** y la gráfica interseca al eje x en dos puntos.

❖ Si $\Delta = 0$ la función tiene 2 raíces **reales iguales** y la gráfica apoya su vértice sobre el eje x .

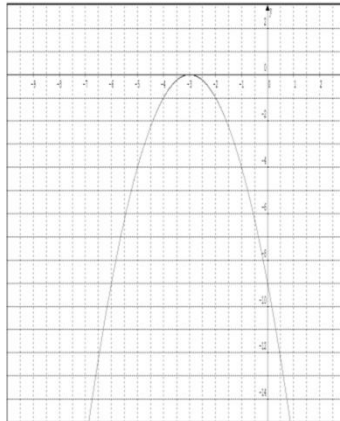
✦ Si $\Delta < 0$ la función tiene 2 raíces **complejas conjugadas** y la gráfica de la función no interseca al eje x.

Ejemplos

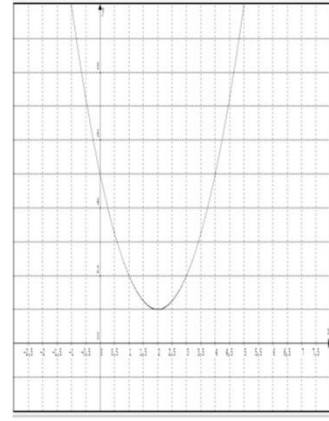
a) $y = 2x^2 - 12x + 10$



b) $y = -x^2 - 6x - 9$



c) $y = x^2 - 4x + 1$



Expresión Polinómica, Canónica y Factorizada de la Función Cuadrática

