Cuadernillo de Matemática

Curso de nivelación 2022

1 Programa

Unidad 1

Los Números Reales. Ampliación de los Conjuntos Numéricos. Operaciones. Propiedades.

Proporcionalidad numérica. Razones. Proporciones. Propiedad Fundamental de las Proporciones. Aplicaciones: Porcentaje; Regla de Tres Simple, directa e inversa. Resolución de Problemas.

Unidad 2

Figuras Geométricas Planas. Clasificación. Características. Perímetro. Área. Propiedades.

Cuerpos Geométricos. Área. Volumen.

Unidades Agrarias. Relación entre las Unidades de Capacidad y Volumen.. Resolución de Ejercicios.

Unidad 3

Trigonometría. Sistemas de Medición de Ángulos. Razones Trigonométricas. Teorema de Pitágoras. Resolución de Triángulos Rectángulos. Teorema del Seno y del Coseno de un ángulo. Resolución de Triángulos Oblicuángulos. Relación entre las Razones Trigonométricas de un mismo ángulo. Resolución de Problemas.

Unidad 4

Ecuaciones. Concepto. Grado de una Ecuación. Secuencia para la Resolución de Problemas. Ecuación de Primer Grado con una Incógnita. Expresión General. Ecuación de Segundo Grado. Expresión General. Raíces. Discriminante. Resolución de Problemas.

Sistemas de Ecuaciones. Métodos de Resolución: Gráfico y Analíticos: Igualación, Sustitución y Determinantes. Resolución de Problemas.

Unidad 5

Sistema de Coordenadas Cartesianas. Par Ordenado. Interpretación de Gráficos. Funciones. Definición. Función Creciente, Decreciente, Constante. Máximos, Mínimos y Ceros.

Funciones dadas por Fórmulas. Función Afín. Características. Representación Gráfica.

Función Cuadrática. Características. Representación Gráfica. Expresión Canónica, Polinómica y Factorizada.

Resolución de Ejercicios y Problemas.

Bibliografía

- MATEMÁTICA DE 9º EGB; Margarita Rodríguez, Miguel Martínez; Mc Graw

Hill.

- MATEMÁTICA 2, Nelly Vázquez de Tapia, Alicia Tapia de Biblioni, Carlos Tapia; Estrada.
- MATEMÁTICA ACTIVA; Liliana Laurito, Laura B. de Stisin, Eduardo Trama, Dora Zuger, Estela Sidelsky; Puerto de Palos.
- MATEMÁTICA 1 ACTIVA; Adriana Berio, María Lucila Colombo, Carina D'Albano, Oscar Sardella, Irene Zapico; Puerto de Palos.
- MATEMÁTICA DE 9º EGB SERIE CLAVE; Marina Andrés, Pablo Kaczor, María Celina Latorre, Gustavo Piñeiro; Santillana.
- MATEMÁTICA 1, Pablo Kaczor, Ruth Schaposchnik, Eleonora Franco, Rosa Cicala, Bibiana Díaz; Santillana.

Cuadernillo elaborado por Prof. Claudia García.

Corregido por Prof. Alberto Yebra.

Unidad 1
Los Números Reales . Operaciones. Propiedades

Nº Naturales N

0; 1; 2 ;3; … Nº Negativos -2; -1; Enteros Z Nº 0; 1; 2; …

-1; -2 ;-3; … Nº Racionales

Nº Fraccionarios y Decimales

¼; -½; 0,8; ¾; ... Nº Naturales R

Potenciación

$a^0=1$ $a^1=a$ $a^{-n}=(1/a)^n$

$a\neq 0$

- Distributiva

$(a\bullet b)^n=a^n\bullet b^n$

$(a:b)^n=a^n/b^n$

- Producto de potencias de igual base

$a_x \bullet a_y=a_{x+y}$

- Cociente de potencias de igual base

$a_x : a_y=a_{x-y}$

Adición. Propiedades

- Asociativa:

$(a+b)+c=a+(b+c)$

- Conmutativa: $a+b=b+a$
- Elemento Neutro:

$a+0=a$

- Elemento Opuesto:

$a+(-a)=0$

Radicación índice

n raíz

$\sqrt{a}=b$

radicando

Nº Irracionales e;

; -; ; …

- Distributiva n n

n

$\sqrt{a\bullet b}= \sqrt{a} \bullet \sqrt{b}$

n n n

$\sqrt{a:b}= \sqrt{a} : \sqrt{b}$

- Raíz de raíz a

b a•b

$\sqrt{\sqrt{n}}= \sqrt{n}$

- Regla de signos

Índice	Radicando	Raíz
Impar	+	+
Impar	-	-
Par	+	+ y -
Par	-	No tiene solución en

Multiplicación. Propiedades

- Asociativa:

$(a\bullet b)\bullet c=a\bullet (b\bullet c)$

- Conmutativa:

$a\bullet b=b\bullet a$

- Elemento Neutro:

$a\bullet 1=a$

- Elemento Inverso para $a\neq 0$:

$$\frac{1}{a} \bullet a = 1$$

- Distributiva $a\bullet (b+c)=a\bullet b+a\bullet c$

- Potencia de potencias

$(a_x)_y=a_{x \bullet y}$

Regla de signos

Base	Exponente	Potencia
+	Par	+
-	Par	+
+	Impar	+
-	Impar	-

Razones. Proporciones: propiedades, problemas. Porcentaje. Regla de Tres Simple. Problemas.

Se denomina razón entre dos números racionales, a y b, al cociente entre ellos, siendo $b \neq 0$.

Ejemplo:

$7/4=1,75$ $5/2=2,5$ $3/10=0,3$

Cuatro números racionales a, b, c, d (con b y $d \neq 0$), forman una proporción, si la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos segundos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a;d $\Rightarrow$ extremos

Se lee a es a b como c es a d

b;c $\Rightarrow$ medios

Ejemplo:

$$\frac{14}{6} = \frac{7}{3} \qquad \frac{18}{6} = \frac{9}{3}$$

Propiedad fundamental de las proporciones: En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad a \cdot d = b \cdot c$$

Aplicaciones

Se utilizan también las proporciones para calcular porcentaje y resolver problemas de regla de tres simple.

Porcentaje

En los porcentajes, se hace una referencia de cierta cantidad de una determinada magnitud, respecto una cantidad de 100 unidades respecto de otro magnitud.

Se aplica como beneficio o perjuicio, cuando hacemos referencia atransacciones económicas (compra, venta, pago de préstamos, etc). Como beneficio es el caso del descuento que se aplica cuando se realiza una compra al contado o los intereses que produce el dinero en una cuenta bancaria. Como perjuicio, es el caso de recargos, por ejemplo, cuando se realiza el pago en cuotas o cuando se pagan impuestos o servicios fuera de término, etc. Cuando es un beneficio, se resta, en caso de perjuicio, se suma a la cantidad base.

Ejemplo: Calcular el 23% de $75.

100% ------ $7500
23% ------- $ x

$$\frac{100}{23} = \frac{7500}{x} \qquad x = \frac{23 \cdot 7500}{100} = 1725$$

Luego, el 23% de $7500, es $1725.

Si fuera descuento, se resta: 7500 -1725=5775
Si fuera recargo, se suma: 7500 +1725=9225

Regla de tres simple

Los problemas en los que intervienen magnitudes que son proporcionales entre sí, se denominan de regla de tres simple.

Cuando las magnitudes son directamente proporcionales, el problema es de regla de tres simple directa; cuando son inversamente proporcionales, es de regla de tres simple inversa.

Ejemplos:

a) Para ver un espectáculo artístico entre dos amigas abonan \$560. ¿Cuánto deberán abonar un grupo de 5 personas para ver el mismo espectáculo?

2 p_____\$560
5 p______x
+ +

$$\frac{2}{5} = \frac{560}{x}$$

$$x = \frac{560 \cdot 5}{2}$$

$$x = 1400$$

Respuesta: las 5 personas deberán abonar \$1400.

b) Para finalizar un trabajo 12 obreros tardan 8 días, si el trabajo se quiere terminar en 6 días ¿cuántos obreros serán necesarios?

8d ------- 2ob
6d -------- x ob
- +

$$\frac{8}{6} = \frac{X}{12}$$

$$x = \frac{12 \cdot 8}{6}$$

$$x = 16$$

Respuesta: serán necesarios 16 obreros.

EJERCITACION PARTE A:

I) Indicar si los siguientes cálculos son correctos (C) o incorrectos (I).

a) $[(7/3)^2]^3=(7/3)^5$ ▲

b) $(7+a)\cdot 4=4a+28$ ▲

c) $(5+a)\cdot(5-a)=25-2a$ ▲

d) $5^7\cdot 5^{-3}=5^{10}$ ▲

f) $\sqrt{-16}=-4$ ▲

g) $7^3:7^9=7^{-6}$ ▲

h) $(1/3)^2:3^{-4}=9$ ▲

i) $\{[(19/4)^2]^0\}^{-3}=0$ ▲

e) $(-4/3)^{-2} = -16/9$

j) $(2ab-c)^2 = 4ab^2 - c^2$

II) Dadas las siguientes afirmaciones indica si son verdaderas (V) o falsas (F).

1) Toda potencia de exponente uno da como resultado uno

2) Toda potencia siempre tiene solución

3) La radicación es distributiva con respecto a la adición y sustracción

4) La raíz cúbica de cualquier número negativo da como resultado un

número negativo

5) La potenciación es distributiva respecto de la multiplicación y la división

6) La raíz cuadrada de un número negativo tiene como solución un número real

7) La multiplicación es distributiva respecto de la adición y sustracción

8) La división entre números reales es conmutativa

9) Si el exponente de una misma potencia es un número negativo, se invierte la base

10) El conjunto de los números irracionales está incluido en el conjunto de los números reales

11) La propiedad fundamental de las proporciones indica que el producto de
dos cualesquiera de ellos es igual al producto de los otros dos

III) Resuelve los siguientes problemas de porcentaje y regla de tres simple. Da la respuesta a los mismos.

1) Si sobre el precio de lista de una prenda que cuesta $750 se hace un descuento del 10% por pago contado, ¿cuánto se debe pagar por dicha prenda?

2) Si sobre una factura de un servicio se aplica un recargo del 8%, que es equivalente a $38,8, calcula el monto original de la factura.

3) Una agencia de turismo ofrece un viaje por una semana a $ 9000, al contado, o bien en 12 cuotas de $990. Calcula el porcentaje que se cobra en concepto de recargo por el pago en cuotas.

4) La cooperadora de una escuela organizó una rifa, cada talonario tenía 200 números y se vendieron 6 talonarios y medio, a razón de $30 cada número. Si a la cooperadora le queda de ganancia el 20% de lo recaudado, ¿cuánto dinero recibió por dicha rifa?

5) Por la compra de 10 libros, en total se pagó $1090. Esta compra recibió un descuento del 15% sobre el precio total. Si con el dinero que se descontó se compraron 3 diccionarios, calcula cuánto dinero se pagó por cada uno de éstos diccionarios.

6) En un taller 8 obreros producen 48 piezas diarias. ¿Cuántos obreros deberán contratar para triplicar la producción?

7) Un alumno estudiando 3hs diarias, emplea 20 días para preparar un examen. ¿Cuántos días tardará si estudia 5 hs diarias?

8) Una tarjeta de recarga para celulares permite efectuar 50 llamadas de $3,20 cada una. ¿Cuántas llamadas se podrán realizar con la misma tarjeta, si el costo de cada una es de $10?

9) Un avión tarda 1h 20m en realizar un trayecto entre dos ciudades que distan 720km. ¿Cuánto tardará el avión en recorrer 1260km a la misma velocidad?

10) En un club se organizó un campamento, y han previsto comestibles para 48 personas durante 5 días. Si a último momento se agregan 12 chicos ¿para cuántos días alcanzarán los comestibles previstos?

11) En el envase de una cafetera eléctrica se informa que la jarra rinde para 12 pocillos de 60ml de capacidad. Cristina tiene pocillos de 72ml, ¿cuántos pocillos podría llenar con una jarra?

12) Para enviar por correo privado 24 cartas certificadas se pagó $540, ¿cuánto se deberá abonar para enviar 7 cartas más?

EJERCITACIÓN OPERACIONES CON Nº REALES PARTE B:

Ejercicio Nº1

Si a y b son números enteros negativos.

a- a. b es positivo. b- a + b es positivo. c- $a^3 + b^3$ es positivo.

Ejercicio Nº2

Si el producto de tres números enteros es positivo, con seguridad se cumple que:

a- Los tres números son positivos. b-

Alguno de los números es negativo. c-

Alguno de los números es positivo.

Ejercicio Nº3

Estamos a 5ºC y la temperatura lleva todo el día subiendo a razón de 3ºC cada hora. Hace tres horas estábamos a:

a- -4ºC

b- 14ºC

c- 4ºC

Ejercicio Nº4

Viajamos de Mendoza a San Luis a velocidad constante de 90 km por hora. Si estamos en el kilómetro 190, hace 90 minutos estábamos en el kilómetro:

a- 55

b- 65

c- 10

Ejercicio Nº5

Si a es un número negativo, $-a^2$ es:

a- Un número negativo. b- Un número positivo. c- Su signo depende del valor absoluto de a.

Ejercicio Nº6

$(a + b^2)^2$ es igual a:

a- $a^2 + b^2 + 2ab^2$ b- $a^2 + b^4 + 2ab^2$ c- $a^2 + b^4$

Ejercicio Nº7

La expresión $(a - b)^2$ es igual a:

a- $a^2 + b^2 - 2ab$ b- $a^4 + b^4 - 2ab$ c- $a^4 + b^4 - 2a^2b^2$

Ejercicio Nº8

Si a y b son números enteros, $(a+3b)^2$ es igual a:

a- $a^2 + 9b^2$ b- $a^2 +$
$9b^2 + 3ab$ c- $a^2 +$
$9b^2 + 6ab$

Ejercicio Nº9
2a + 4b es igual a:
a- 2. (a+2b) b-
2. (a+46) c- 2.
(a+b) .4

Ejercicio Nº10
Si a y b son números enteros, la expresión b.(b-a) + (-1).(-a).b es igual a:
a- b^2 b- b^2 –
2ab c- b.(b +
a)

Ejercicio Nº11
El producto (a + b) (a – b) es igual a:
a- $a^2 - b^2$ b-
$a^{-2} - b^{-2}$ c-
$b^2 - a^2$

Ejercicio Nº12
El cociente 2 : es igual a: a-
$\overline{b}$ b-
$\frac{a}{2b}$
$\frac{2b}{}$ c-

Ejercicio Nº14
El resultado de la operación 1,5 + 3. (1/2 – 1/6) es igual a:

a- 2,5 b-
3,5 c- _

Ejercicio Nº15
Dos fracciones se dicen equivalentes si:
a- Tienen el mismo denominador b-
Son semejantes
c- Representan al mismo numero racional

Ejercicio Nº16

La fracción 75/6 representa al número decimal:
a- 11,3 b-
12,5 c-
12,05

Ejercicio Nº17

Dados los siguientes ejercicios combinados resuelva sin usar calculadora.

a- 4 – 3 (8 – 12) – 6 = b- 2
[3 – 2 (4 – 8)]

c- – – + =

d- – [– – – + – =

e- – – – – =

f- – (–)^2

g- – – : –1 + – =

Ejercicio Nº18

Repartimos un pastel entre tres niños, si el primero recibe la mitad del pastel, y el segundo la mitad que el primero ¿Qué parte del pastel recibe el tercero?
a- Nada b- 1/4 de
pastel c- 3/8 de
pastel

Ejercicio Nº19

Una dieta alimenticia se compone de 2/3 de proteínas, 1/6 de lípidos y el resto hidratos de carbono. ¿Qué fracción de la dieta esta compuesta de hidratos de carbono? a- 8/11 b- 1/15 c- 3/18

Ejercicio Nº20

Un abogado recupera el 90% de una demanda de $200000 y cobra, en concepto de servicios, el 20% de la cantidad recuperada. ¿Cuánto dinero recibe su cliente?

a- $180000
b- $36000 c-
$144000

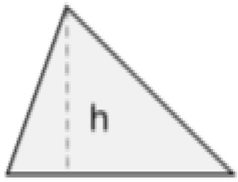
Unidad 2
Figuras Planas. Perímetro. Área.

Triángulos

Son polígonos convexos de tres lados, se pueden clasificar según sus lados y según sus ángulos.

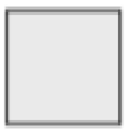
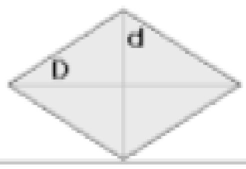
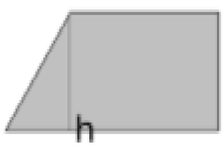
Lados
- **Equilátero:** tres lados iguales.
- **Escaleno:** tres lados desiguales.
- **Isósceles:** dos lados iguales.

Ángulos
- **Acutángulo:** tres ángulos agudos.
- **Obtusángulo:** un ángulo obtuso.
- **Rectángulo:** un ángulo recto.

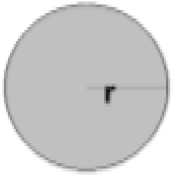
Figura	Perímetro	Área
	$p= l + l + l$	$a= \frac{b \cdot h}{2}$

Cuadriláteros

Son polígonos convexos y se clasifican según sus lados.

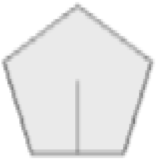
Figura	Características	Perímetro	Área
	**Cuadrado:** es rectángulo y rombo	$p= l \cdot 4$	$a= l^2$
	**Rombo**: cuatro lados iguales	$p= l \cdot 4$	$a= \frac{d \cdot D}{2}$
	**Rectángulo**: cuatro ángulos iguales	$p= l \cdot 2 + l' \cdot 2$	$a= b \cdot h$
	**Trapecio**: un par de lados paralelos	$p= l_1 + l_2 + l_3 + l_4$	$a= \frac{(b+b') \cdot h}{2}$

Circunferencia. Círculo

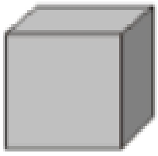
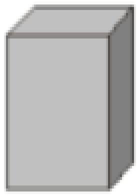
	d= 2 radios	$p= 2\,\pi \cdot r$ $p= \pi \cdot d$	$a= \pi \cdot r^2$

Polígono regular:

Todos sus lados y ángulos son iguales

	**apotema:** perpendicular del centro del polígono a cualquiera de sus lados	$p= n \cdot l$ n: número de lados	$a= \dfrac{p \cdot apot.}{2}$ p: perímetro

Cuerpos. Área. Volumen.

Cubo	Esfera	Cilindro	Paralelepípedo
			
$a= l^2 \cdot 6$	$a=4\pi \cdot r^2$	$a=2\pi \cdot r \cdot (h+r)$	a=per. base • h + 2 sup. base
$v= l^3$	$v=4/3\ \pi \cdot r^3$	$v=\pi \cdot r^2 \cdot h$	v= sup. base • h

Unidades de Capacidad y Volumen: Relación.

Capacidad	1 kl	1 l	1 ml
Volumen	1 m^3	1 dm^3	1 cm^3

Unidades Agrarias.

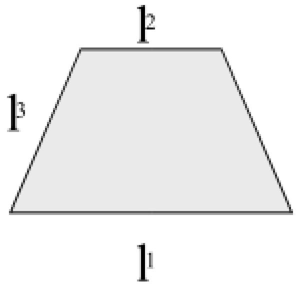
Su uso se ha impuesto para la medición de campos.

hectárea	ha	hm^2	10.000 m^2
área	a	dam^2	100 m^2
centiárea	ca	m^2	1 m^2

EJERCITACION PARTE A:

IV) Resolver los siguientes problemas aplicando las fórmulas que corresponden y dar la respuesta al problema.

1) Dado el siguiente trapecio isósceles

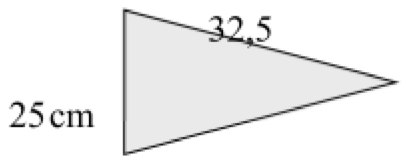


a) Expresar el perímetro del mismo con una fórmula de no más de tres sumandos.

b) Calcular el perímetro sabiendo que l_1 tiene una longitud de 9cm y l_2 es la mitad de l_1, mientras que l_3 es el promedio de ambos lados.

2) Un polígono regular de 24,5dm de perímetro tiene lados de 35cm. Indicar el número de lados del polígono nombrado

3) Para hacerle el borde a unos banderines (como los de la figura) se les coserán cintas de colores: 50 banderines llevarán cinta de color verde, 25 con cinta roja y 30 con cinta blanca. Si cada rollo de cinta trae 10m ¿cuántos rollos de cada color se deben comprar?



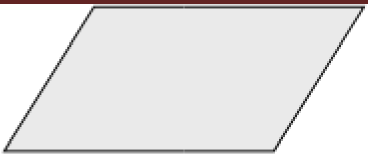
4) El perímetro de un trapecio isósceles es de 108cm. Cada uno de los lados congruentes mide 23cm, la base mayor supera en 8cm a la longitud de la base menor. Calcula las longitudes de las bases del trapecio.

5) Calcula el perímetro del paralelogramo abcd sabiendo que:

b c ab= x+2cm.

bc= 2x+4cm

cd= 2x-5cm



a d

perím= 33cm +3 x

6) El perímetro de un trapecio rectángulo es de 54cm; la medida del lado oblicuo a las bases es de 12cm, la medida de la base menor es igual a la medida de la altura y la base mayor mide el doble de la base menor. Calcular el árera del trapecio.

EJERCITACION PARTE B:

1) Calcular la longitud del lado de un octógono regular de $120cm^2$ de área, sabiendo que la apotema es 6cm.

2) En un rombo una diagonal es el triple de la otra, y la suma de sus longitudes es igual a 30cm. Calcular el área del rombo.

3) Una mesa redonda de 1,35m de diámetro se amplía abriéndola con dos tableros de 1,35m por 40cm. Calcula el área de la mesa redonda y el áreade la mesa ampliada.

4) Una pelota de vóley tiene una circunferencia de 628mm de longitud, calcula su área.

5) Calcular el perímetro de un rectángulo de $288cm^2$ de área, sabiendo que la medida de uno de sus lados es el doble de la medida del otro.

6) Un constructor dispone de una barilla de hierro de 157cm de longitud para hacer el borde de una abertura, que debe tener la máxima área posible. Su forma puede ser cuadrada, triangular o circular, determinar cuál es la mejor opción.

7) Una lata de tomates tiene una altura de 12cm y el diámetro de la base es de 6cm. ¿Cuántos cm^2 de hojalata son necesarios para fabricarla? ¿Cuál es el máximo volumen que puede contener?

8) ¿Cuántos baldes de 6 litros se pueden llenar con el agua de un tanque cilíndrico de 4m de diámetro y 3m de altura?

9) La superficie de la base de un prisma es de $160cm^2$. Si su volumen es de 8000 cm^3, ¿cuál es su altura?

10) Una bola de billar puede tener 62mm o 63mm de diámetro. ¿Cuántos cm^3 de volumen habría de diferencia en uno y otro caso?

11) Se deben confeccionar cajas cúbicas de 10cm de arista y cajas rectangulares de 20cm por 10cm por 5cm. Calcula el volumen de cada caja y la cantidad de cartón necesaria para su construcción.

Unidad 3
Trigonometría.

La trigonometría se ocupa de relacionar las medidas de los lados de u triángulo con sus ángulos, es de mucha utilidad cuando se trata de medir longitudes inaccesibles al ser humano, como por ejemplo: alturas de montañas, torres, ancho de ríos, etc.

Sistema de Medición de Ángulos

Para mediar ángulos se utilizan generalmente dos sistemas de medición:

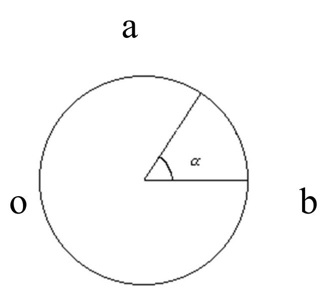
Sistema Sexagesimal:

La unidad de medida es el grado sexagesimal (1º), se obtiene al dividir un ángulo recto en 90 partes iguales.

$$1^{\circ} = \frac{1\,R}{90} \Rightarrow 1R = 90^{\circ}$$

Sistema Circular:

La unidad de medida es el radián y es el ángulo que abarca un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma. Un ángulo de giro es de 2π radianes.



$$\alpha = 1\text{radián} = \frac{ab}{ob}$$

Equivalencias entre ambos Sistemas.

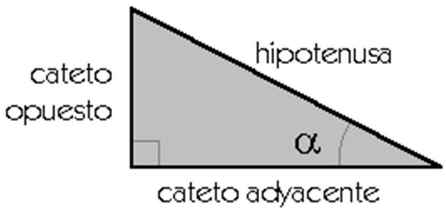
Sistema Sexagesimal	Sistema Circular
90º	π/2
180º	π
360º	2π

Razones Trigonométricas

Se denominan razones trigonométricas a las razones que relacionan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con las amplitudes de los ángulos agudos del mismo. Estas razones son: seno, coseno y tangente y dependen únicamente de la amplitud del ángulo considerado.

Para definir estas razones, en un triangulo rectángulo, se tendrá en cuenta: la hipotenusa, se identifica como el lado opuesto al ángulo recto; los catetos opuesto y adyacente dependerán del ángulo agudo con el que se trabaje.

Las razones trigonométricas se definen de la siguiente manera:



cateto opuesto

sen ✔ = ________________________

hipotenusa

cos ✔ = cateto adyacente

hipotenusa

cateto opuesto

____

tg ✔ = cateto adyacente

Estas razones trigonométricas permiten resolver triángulos rectángulos: conocer las amplitudes de sus ángulos agudos y las longitudes de sus lados.

Para resolver triángulos rectángulos se tendrá en cuenta:

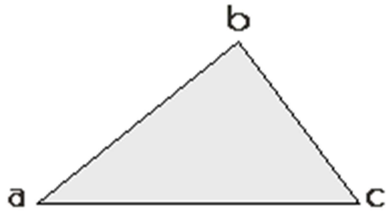
- que la suma de las amplitudes de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de 90º
- el Teorema de Pitágoras: el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Teorema del Seno y del Coseno

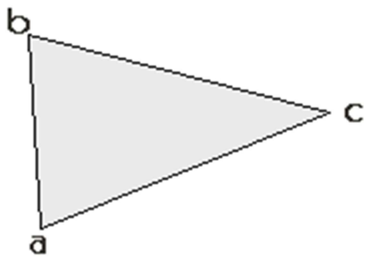
Estos teoremas relacionan las longitudes de los lados de cualquier triángulo con las amplitudes de sus ángulos interiores.

- Teorema del Seno: en todo triángulo sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos



$$\frac{ab}{\text{sen } c} = \frac{bc}{\text{sen } a} = \frac{ac}{\text{sen } b}$$

- Teorema del Coseno: el cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman.



$bc^2=ab^2+ac^2 - 2 \bullet ab \bullet ac \bullet \cos a$

$ac^2=ab^2+bc^2 - 2 \bullet ab \bullet bc \bullet \cos b$

$ab^2=ac^2+bc^2 - 2 \bullet ac \bullet bc \bullet \cos c$

Estos teoremas permiten resolver triángulos oblicuángulos (no tienen ningún ángulo recto), para dicha resolución además de los teoremas mencionados se utiliza la siguiente propiedad de los triángulos: “la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es 180º”

Relación entre las Razones Trigonométricas de un mismo Ángulo

$\text{cosec } \checkmark = \dfrac{1}{\text{sen } \checkmark}$ $\quad$ $\sec \checkmark = \dfrac{1}{\cos \checkmark}$ $\quad$ $\text{cotg } \checkmark = \dfrac{1}{\text{tg } \checkmark}$ $\quad$ $\text{tg } \checkmark = \dfrac{\text{sen } \checkmark}{\cos \checkmark}$

sen^2 🚲 $+ \cos^2$ 🚲 $= 1$ relación pitagórica.

EJERCITACION PARTE A:

I) Plantear y resolver los siguientes problemas, realizando los gráficos. Dar la respuesta a los mismos.

1) Calcula la altura de un triángulo rectángulo, si se sabe que la longitud de la base es 4,5mm y la longitud de la hipotenusa es 11,5mm.

2) Calcula el perímetro de un cuadrado, si la longitud de la diagonal es 4,15cm y determina con los lados un ángulo de 45º.

3) Un mástil de 7,5m de longitud proyecta una sombra de 5,4m. Calcula el ángulo de elevación del sol.

4) Una escalera se apoya en la pared, para que nos se deslice, debe formar un ángulo de 47º con el piso, calcula qué altura alcanza si la escalera mide 2,65m.

5) Se utiliza un tensor para sostener una antena de telefonía de 24,5m. Calcula la lngitud del tensor, si este determina con la antena un ángulo de 63º.

6) Calcular la distancia a la que se encuentra una persona de un pino de 4,75m de altura, si la persona desde donde está ubicada ve la punta del mismo con un ángulo de 78º.

7) Para sostener un poste de 2,8m de altura se ata de la punta una cuerda de 4,5m con una estaca en el piso. Calcula la distancia del pié del poste a la estaca.

8) Calcular las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo si la longitud de la hipotenusa es 7,8cm y determina con la base un águlo de 42º37’.

9) En un depósito, para subir equipos, se coloca una cinta transportadora a 3,5m de la pared. Si esta forma con el piso un ángulo de 57º, calcula la altura que alcanza y la longitud de la cinta transportadora.

10) En un triángulo rectángulo se conoce que la longitud de la hipotenusa es de 10,5cm y la longitud de la base 6cm. Calcular la longitud del otro cateto y las amplitudes de los ángulos agudos.

II) Dados los siguientes triángulos oblicuángulos, calcular sólo las incógnitas indicadas. Resolver los siguientes problemas.

1)

2) abab=10,5=44,5cmcm *a* , *b* y *c*

DD aca=115º20=7cm ’ I bc=

bcc=40º35=8,5cm’ I

3) ab=14,5cm ac = D bc=38,5cm I a=

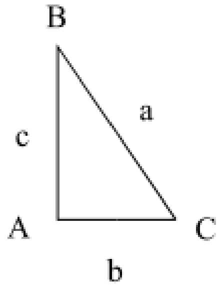
b=98º40’ c=

4) Calcula la longitud de la diagonal de un pentágono regular de 6,8cm de lado.

5) Calcular el área de un rombo si la longitud de cada uno de sus lados es 4,75cm y la amplitud de cada uno de los ángulos agudos es 67º.

6) En una plazoleta de forma triangular las longitudes de los lados son: 52m, 65m y 78m. Calcular los ángulos que se forman en las esquinas de la plazoleta.

EJERCITACION TRIGONOMETRÍA PARTE B:



Ejercicio Nº1

Datos: a= 12,54 m C= 47º 12´

A = 33° 15´

Incógnitas: B ; c ; b

Ejercicio Nº2

Datos:

B= 18º 13 46”

a= 22,97 m A=

50° 45´

Incógnitas: b ; c ; C

Ejercicio Nº3

Datos: b=8,9

cm B=17º 2´

50”

A= 120° 57´ 10”

Incógnitas: a ; c ; C

Ejercicio Nº4

Datos:

b=54,5 cm

c=93 cm A=

130°

Incógnitas: a ; B ; C

Ejercicio Nº5

Datos: a=84,5

cm c=34 cm

A= 45° 20´

Incógnitas: b ; B ; C

Ejercicio Nº6

Calcule la longitud que debe tener una escalera para que apoyada en la pared alcance una altura de 2,80 m al formar con el plano de la base un ángulo de 42º 35´ .

Ejercicio Nº7

¿Cuál es la pendiente de un alambre carril de 285 m que une dos puntos , cuya altura respecto del mar es 846m y 905m?

Ejercicio Nº8

Halle la longitud de la sombra que proyecta una propiedad horizontal de 24m de altura cuando la oblicuidad de los rayos solares forma con el plano del horizonte un ángulo de 67º 45´ 20”.

Ejercicio Nº9

La base de un triangulo isósceles es de 100m y uno de los ángulos adyacentes es de 45º 10´ 4”. Encuentre la longitud de uno de los lados iguales, y el ángulo opuesto a la base.

Ejercicio Nº10

Completa la siguiente tabla.

ángulo	sexagesimal	centesimal	circular
α_1	36º		
α_2		120^G	
α_3			$\frac{3}{4}\pi$

Ejercicio Nº11

Calcule el valor del ángulo x y exprese el resultado en grados sexagesimales: a- X= + α – 3 β ; $\alpha=90^G$; β = 25º 18´ 32”

Ejercicio Nº12

Un ángulo central determina un arco de 6cm en una circunferencia de 30cm de radio .Exprese el ángulo central en radianes y en grados , minutos y segundos sexagesimales.

Ejercicio Nº13

Encuentre las soluciones, comprendidas entre 0 y 2π , de las ecuaciones que siguen:

a- $2.\text{sen}^2\,\alpha - 3.\ \text{sen}\,\alpha + 1 = 0$ b- $2.\cos^2\alpha + \cos\alpha = 0$

Unidad 4

Ecuaciones. Sistema de Ecuaciones.

Una ecuación es una igualdad que contiene, al menos, un valor desconocido que se denomina incógnita, esta se representa mediante letras.

El grado de una ecuación es el mayor exponente al que aparece elevada la incógnita:
$2x+13/5=17$ ecuación de 1º grado.
$4x^2-7/2x=6/5$ ecuación de 2º grado.

Resolver una ecuación significa hallar el o los valores de las incógnitas que hacen cierta la igualdad. Estos valores se denominan soluciones de la ecuación. Para resolver una ecuación se procede de la siguiente manera:

- se separa en términos y se resuelven todas las operaciones posibles
- se reúnen en un mismo miembro, los términos en los que figuran las incógnitas y en el otro miembro los términos independientes
- se efectúan las reducciones en ambos términos

Las ecuaciones y los sistemas, tanto en Matemática como en otras ciencias, se aplican como una herramienta eficaz para la resolución de problemas. Para resolver dichos problemas utilizando ecuaciones o sistemas de procede de la siguiente manera:

1. Comprender el enunciado del problema: se debe leer el problema las veces que sea necesario, distinguiendo la incógnita (es lo que se desea averiguar) de los datos.

2. Plantear la ecuación: convertir el enunciado del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico, es decir, traducir cómo se relaciona la/s incógnita/s con los datos.

3. Resolver la ecuación.

4. Comprobar la solución obtenida: comprobar si la/s solución/es obtenida/s, satisface/n las condiciones del enunciado del problema.

Ecuaciones de 1º grado con una incógnita

La expresión general de la ecuación de 1º grado es: $a \cdot x+b=0$ siendo a y b números reales y a ≠ 0. Ejemplos:

a) La mitad de un número más la tercera parte de su consecutivo es 17/6. ¿De qué número se trata?

$x/2 + 1/3\,(x+1)=17/6$ $x/2 + x/3 + 1/3 = 17/6$ $x/2 + x/3 = 17/6-1/3$

$5/6.x = 15/6$ $x = 15/6 \cdot 6/5$

$x = 3$ $S = \{3\}$

Respuesta: el número es 3

b) El perímetro de un paralelogramo es 45 cm, si la longitud del lado menor es la quinta parte del lado mayor incrementado en 3 cm. Calcula la longitud del lado mayor.

x/5 + 3

x

$$2x + 2\,(x/5 + 3) = 45$$
$$2x + \frac{2}{5}x + 6 = 45$$
$$\frac{12}{5}x = 45 - 6$$
$$x = 39\ \frac{5}{12}$$
$$x = \frac{65}{4}$$
$$x = 16{,}25\text{cm}$$
$$S = \{16{,}25\}$$

Respuesta: la longitud del lado mayor es 16,25cm

c) Mariana gastó en un regalo para su abuela las dos quintas partes del dinero que tenía, en el regalo para su tía: la mitad de lo que le quedaba y aún le quedan \$ 7,50. Calcular la cantidad de dinero que disponía Mariana.

$$2/5\,x + 1/2.3/5\,x + 7{,}50 = x$$
$$2/5\,x + 3/10\,x - 1 = -\,7{,}50\ -3/10\,x = -75/10\,x$$
$$= -75/10 \bullet -3/10$$
$$x = 25$$
$$S = \{25\}$$

Respuesta: Mariana disponía de \$25.

También puede suceder, que un problema no tenga solución o que tenga infinitas soluciones.

Ecuaciones de 2º grado

La expresión general de una ecuación de 2º grado es:

$a \bullet x^2 + b \bullet x + c = 0$ donde a, b, c son nº reales y $a \neq 0$ a: coeficiente del término cuadrático b: coeficiente del término lineal c: término independiente

Los valores de x que verifican la ecuación (raíces) se obtienen aplicando una fórmula en la que intervienen los coeficientes de dicha ecuación.

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En ésta fórmula hay una raíz cuadrada, si el radicando es negativo ésta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Discriminante

La expresión $b^2 - 4ac$ permite determinar el tipo de raíces que tiene la ecuación cuadrática, por eso se denomina discriminante y se simboliza con la letra griega delta "Δ"

- Si Δ> 0 la ecuación tiene 2 raíces reales distintas
- Si Δ< 0 la ecuación tiene 2 raíces reales iguales
- Si Δ= 0 la ecuación tiene 2 raíces complejas conjugadas

Ejemplo:

Calcula el número natural cuyo cuadrado más su triplo da como resultado 40.

$x^2+3x=40$

$x^2+3x-40=0$ a=1 b=3 c=-40

$$x_1; x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.(-40)}}{2.1} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-3 \pm 13}{2}$$

Respuesta: el número natural es 5.

$$X_1 = \frac{-3+13}{2} = 5 \qquad x_1; x_2 = \frac{-3 \pm 13}{2}$$

$$X_2 = \frac{-3-13}{2} = -8$$

$S = \{5; -8\}$

Sistema de Ecuaciones

Dos ecuaciones de 1º grado con dos incógnitas cada una, consideradas de forma simultánea (la x e y aluden a la misma incógnita), constituyen un sistema de dos ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Resolver el sistema es hallar, cuando existen, los valores de las incógnitas que verifican las dos igualdades simultáneamente.

Los sistemas se clasifican en compatibles e incompatibles según tengan o no solución. Los sistemas compatibles pueden ser determinados o indeterminados según tengan una o infinitas soluciones.

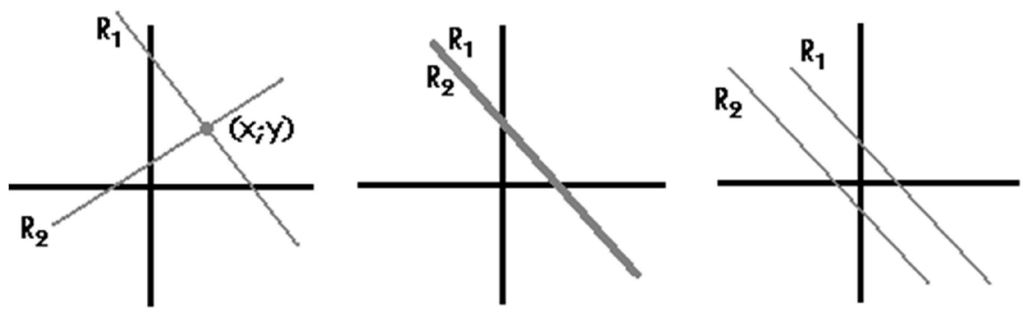
Para resolver éstos sistemas de ecuaciones existen métodos analíticos y gráficos.

Resolución Gráfica:

Cada una de las ecuaciones lineales se puede asociar a una función afín, cuya representación gráfica es una recta. Resolver el sistema significa hallar la intersección de ambas rectas.

Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones, se transforman ambas ecuaciones en otras equivalentes en función de la incógnita y, se representan luego en un mismo sistema de coordenadas cartesianas y se halla la intersección entre ambas rectas, que es la solución del sistema:

rectas secantes	rectas paralelas coincidentes	rectas paralelas disjuntas
única solución	infinitas soluciones	no tiene solución
sistema compatible determinado	sistema compatible indeterminado	sistema incompatible

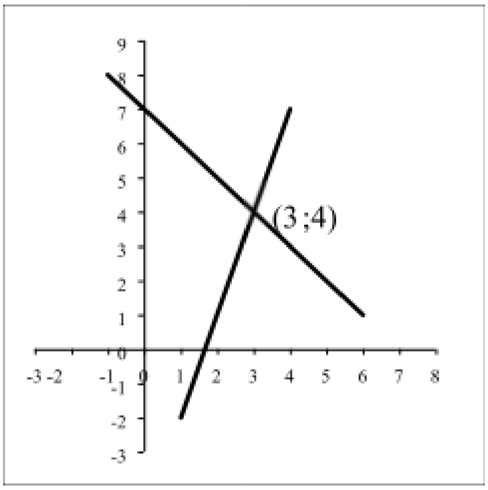


$R_1 \cap R_2=(x;y)$ $R_1 \cap R_2=R_1=R_2$ $R_1 \cap R_2=\emptyset$

Ejemplo:

Calcula los números que cumplen con la siguiente condición: el triple de uno de ellos disminuido en el otro es 5 y la suma de ambos números es7.

$$\begin{cases} 3.x - y = 5 \Rightarrow y = 3.x - 5 \\ x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - x \end{cases}$$



S = {(3; 4)}

Resolución Analítica:

1) Método de igualación

$$\begin{cases} 3.x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

3.x – y =5 x + y =7 se despeja la misma incógnita (x o y) de ambas ecuaciones (en y = 3.x – 5

y = - x +7

3.x – 5 = -x +7 3.x + x = 7
+ 5 4 x = 12 x = 12/4
x = 3

una ecuación que nos permite hallar el valor de la otra incógnita (y)

y = 3.x – 5 y = 3 3 – 5
y = 9 – 5
y = 4

(3; 4)

S =

2) Método de sustitución

$$\begin{cases} 3.x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

este ejemplo se despeja y)

3.x – y = 5 y = 3.x – 5

x + y = 7
x + 3.x –5 = 7
4 x –5 = 7
4 x = 7 + 5 x =
12/4
x = 3

obteniend

y = 3.x – 5 y = 3 3 – 5
y = 9 – 5
y = 4

se despeja una de las incógnitas (x o y) en una de las ecuaciones (en este ejemplo se despeja "y"de)

se sustituye el valor de esta expresión equivalente a una incógnita (y) en la otra ecuación

se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones o , el valor de la incógnita que acabamos de calcular (x), quedando original ( ), y se resuelve hallando el valor de la otra incógnita (x)

ecuación , obteniendo el valor de la primera incógnita (y)

se reemplaza el valor de la incógnita hallada (x) en la

S = (3; 4)

3) Método de determinantes

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = k_1 \\ a_2 x + b_2 y = k_2 \end{cases}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{k_1 b_2 - k_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 k_2 - a_2 k_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3.x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

1

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot 1 - 7 \cdot (-1)}{3 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)} = \frac{5+7}{3+1} = \frac{12}{4} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot 7 - 1 \cdot 5}{3 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)} = \frac{21-5}{3+1} = \frac{16}{4} = 4$$

1

y=

S=●(3; 4)●

EJERCITACION PARTE A:

I) Dados los siguientes problemas: plantéalos, resuélvelos y da la respuesta al mismo.

1) Si a un número se le suma los cuatro quintos de su consecutivo, se obtiene como resultado, el triple de dicho número disminuido en cinco medios. ¿Cuál es el número?

2) Un automóvil consume un cuarto del combustible en un viaje, luego dos tercios del resto en otro viaje, y aún le quedan 15 litros en el tanque ¿Cuál es la capacidad del tanque? ¿Cuánto combustible consumió en el primer y segundo viaje?

3) En un triángulo isósceles cada lado igual es cinco tercios del lado desigual, si el perímetro es de 176mm, calcula la longitud de cada lado.

4) Sebastián gastó la mitad de su sueldo en el supermercado; la cuarta parte en ropa y diversión, la quinta parte en impuestos y seervicios, y aún le quedan $100. Calcula cuál es el sueldo de Sebastián, y la cantidad que gastó en cada rubro.

5) La suma de las edades de dos primos es 77, se sabe que la edad de uno de ellos es cinco sextos de la edad del otro. Calcula la edad de cada uno.

6) Un comisionista vende los dos tercios de un terreno al señor Rivero, un quinto del terreno restante a la señora Navarro, y el terreno de $200m^2$ a la señora Ríos. Calcula el área del terreno vendido y cuánto terreno alquirió cada uno.

7) Calcular el número cuyo cuadrado mas su triple es igual a 40.

8) La edad de Juan Pablo elevada al cuadrado, es igual a cinco veces la edad que tendrá dentro de 10 años. Calcula la edad de Juan Pablo.

9) Sabiendo que el área de un rectángulo es de $18cm^2$ y las longitudes de la base y de la altura son x+1cm y x -2cm, respectivamente. Calcula el perímetro de la figura.

10) El quíntuplo de un número es igual a la mitad de su cuadrado aumentado en 12 unidades. ¿Cuáles son los números que cumplen con dicha condición?

11) El perímetro de un triángulo es 24cm, siendo las longitudes de sus lados: x -2cm; x+3cm y x^2+3cm. Determinarlas.

12) La diferencia entre el doble de un número y otro es -1, y la suma entre la mitad del primero y el segundo es 11. ¿Cuáles son los números que cumplencon la condcición?

13) Agustín contó 23 cabezas y 72 patas correspondientes a los perros y pájaros que tenían los vecinos de su manzana. ¿Cuántos de cada uno de estos animales hay en la manzana?

14) Se organiza un congreso y en el hotel donde se hospedan hay habitaciones dobles y triples. El hotel tiene 49 habitaciones y 119 camas, en total. Calcular cuántas habitaciones dobles y triples hay en el hotel.

15) Un flete cobra \$120 por trasladar 12 cajas chicas y 8 cajas grandes. Si trasladar cada caja grande cuesta \$2,50 más que cada caja chica ¿cuánto se cobra el traslado de cada tipo de caja?

16) El dueño de una finca tiene patos y conejos. Si cuenta 30 cabezas y 94 patas, ¿cuántos patos y conejos tiene?

17) Un mensajero entregó la cuarta parte de la correspondencia por la mañana, a la tarde repartió la sexta parte de lo que le quedaba, y todavía le quedan veinte cartas por entregar. ¿Cuántas cartas tenía que repartir? ¿Cuántas entregó por la mañana y cuántas por la tarde?

18) La diagonal de un rectángulo tiene una longitud de 13 cm, si la altura es 7cm mayor que la base, calcula el perímetro del rectángulo.

19) En una juguetería donde se venden triciclos y bicicletas hay 60 ruedas, y se sabe que hay cinco bicicletas más que triciclos. ¿Cuántas bicicletas y triciclos hay en la juguetería?

20) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 85, ¿cuáles son esos números?

21) Emilia ha comprado en un remate 6 sillas, una mesa y un sofá. La mesa ha costado el cuádruplo del precio de cada silla, y el sofá costó \$10 menos que la mesa. Si en total se ha pagado \$550, calcula cúanto se pagó por cada silla, la mesa y el sofá.

22) El perímetro de un rectángulo es de 24cm. La difeerencia entre la base y la altura es de 2cm, clacular el área de la figura.

II) Dados los siguientes sistemas resolverlos, analítica y gráficamente. Clasificarlos

1 2 3 4			
2x=3y- 6	x+2y=4 x= 3+y	1/4x-1/3 =1/9y	

4x+6y=24 4y+3x=12 3y=-9+3x 5/6y=x -5/2 EJERCITACION ECUACIONES DE 2º GRADO PARTE B

Ejercicio Nº1

La ecuación $-5x+3x^2=12$ tiene:

a- Dos soluciones reales. b-
Una única solución real. c-
Ninguna solución real.

Ejercicio Nº2

La ecuación $-5-2x^2 + 6x = 0$ tiene:
a- Dos soluciones reales. b-
Una única solución real. c-
Ninguna solución real.

Ejercicio Nº3

La ecuación $-16_x + 15 + 4_x^2 = 0$ tiene dos soluciones cuya diferencia es:
a- 3/4
b- 3 c-
1

Ejercicio Nº4

La ecuación $(x - 1)^2 + 3 = 0$, tiene: a-
Dos soluciones distintas. b- Una
única solución. c- Ninguna solución.

Ejercicio Nº5

La suma de las soluciones de la ecuación $x^2 - 3_x + 1 = 0$ es igual a:

a- $-3 + \sqrt{17}$
b- 3 c- -3

EJERCITACION SEL PARTE B Ejercicio Nº1

Si (x_0 , y_0) es la solución del sistema de ecuaciones:

$$2x - 5y = 3$$
$$-6x + 4y = 2$$

Entonces $x_0 - y_0$ es igual a:
a- 1
b- 0
c- 1

Ejercicio Nº2

Si (x_0 , y_0) es la solución del sistema de ecuaciones:

$$3x + y = 1$$
$$2x - 3y = 2$$

Entonces $2x_0 - 3y_0$ es igual a:
a- 2

b- 0 c-
21/11

Ejercicio Nº3

Si (x_0 , y_0) es la solución del sistema de ecuaciones:

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad x + y =$$

$$\frac{-}{4}\ x + \frac{1}{4}\ y = 1$$

Entonces y_0 es igual a:

a- 1/2
b- 1/4
c- 2

Ejercicio Nº4

Si (x_0 , y_0) es la solución del sistema de ecuaciones:

$2_x - y = 1$
$-x + 3_y = 2$

Entonces $x_0 + y_0$ es igual a:

a- 1
b- 2
c- 3

Ejercicio Nº5

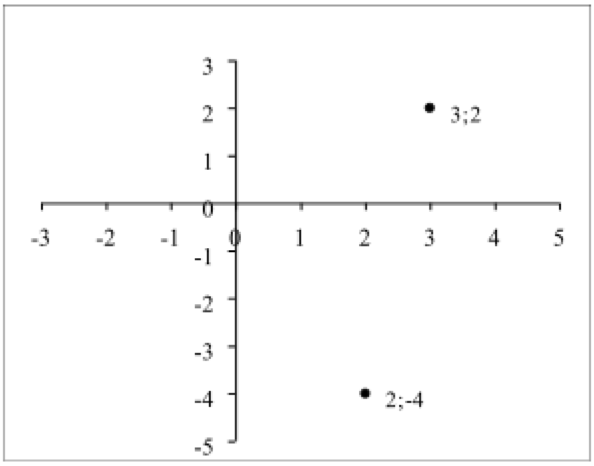
Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuantos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo? a. Al cabo de 10 años

b. Al cabo de 15 años
c. Al cabo de 45 años

Unidad 5
Funciones

Sistema de Coordenadas Cartesianas. Par Ordenado.

Para ubicar puntos en el plano, se utiliza un sistema de ejes cartesianos; son dos rectas perpendiculares entre sí. La recta horizontal se denomina eje de abscisas y se simboliza con la letra x, la vertical eje de ordenadas y se simboliza con la letra y. El punto de intersección de ambos ejes es el origen de coordenadas y es el punto de coordenadas (0;0)

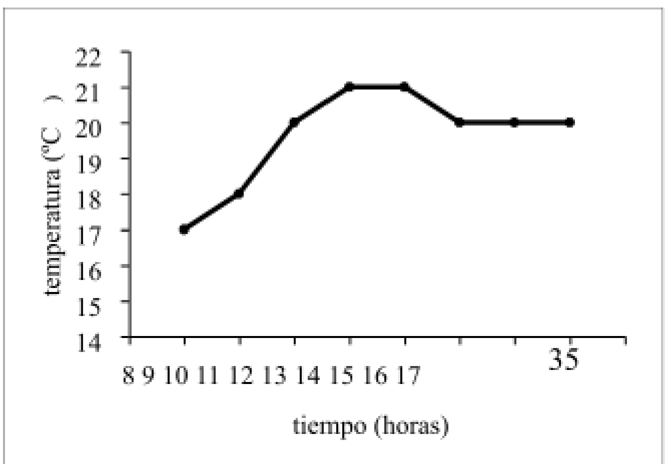


Cada punto en el plano queda determinado por un par ordenado, donde la primera componente representa a la abscisa y la segunda componente representa a la ordenada. Las escalas utilizadas para graduar cada eje pueden ser distintas por conveniencia y/o necesidad, pero debe respetarse siempre la unidad elegida.

Interpretación de Gráficos

A las relaciones entre dos variables se las puede representar en una tabla y en un sistema de coordenadas cartesianas. Los gráficos sirven para poder analizar los cambios ocurridos entre las variables, éstos brindan información muy útil, pues permiten sacar conclusiones de manera rápida. Sólo se trata de aprender a mirar y analizar.

En cada eje se representan los valores de cada una de las variables, en el eje horizontal la variable independiente y en el eje vertical la variable dependiente.



Interpretar un gráfico es analizar los cambios de la variable dependiente en relación con los de la variable dependiente.

Este gráfico muestra la variación de la temperatura ambiental entre las 9 y las 16hs. de un día del mes de setiembre (cambio de Tº en relación al tiempo transcurrido).

Observándolo, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- La temperatura a las 9 era de 17ºC, y aumentó con el transcurso del tiempo, hasta llegar a 21ºC a las 12.
- A partir de las 12 se mantuvo constante durante una hora, disminuyendo 1ºC, la siguiente hora.
- Durante las dos horas siguientes se mantuvo constante y a las 16, la temperatura fue de 20ºC.
- El mayor aumento de la temperatura se registró entre las 10 y 11.

Funciones

Se denomina función a toda relación entre los elementos de dos conjuntos A y B, de modo que a todo elemento x perteneciente al conjunto A, le corresponde un y sólo un elemento del conjunto B, llamado imagen de x, a través de la función f. El esquema funcional es el siguiente:

$f: A \rightarrow B$ es función de A en B $\Leftrightarrow \forall x \in A \ \exists \ y \in B \ / \ y = f(x)$

imagen de x $\rightarrow$ $y = f(x)$

Resumiendo: para que una relación sea función debe cumplir las siguientes condiciones:

- Existencia: todo elemento del primer conjunto tiene que tener imagen en el segundo conjunto.
- Unicidad: que esa imagen sea única.

El Dominio (Dm) de una función es el conjunto formado por los elementos del conjunto A que tienen imagen en el conjunto B.

El conjunto Imagen (Im) de una función, es el conjunto formado por los elementos del conjunto B que son imagen de algún elemento del conjunto A.

Las funciones se designan con letras minúsculas: f, g, h.

Las funciones se pueden representar mediante una tabla, un gráfico, un diagrama de Venn y en algunos casos, mediante una fórmula.

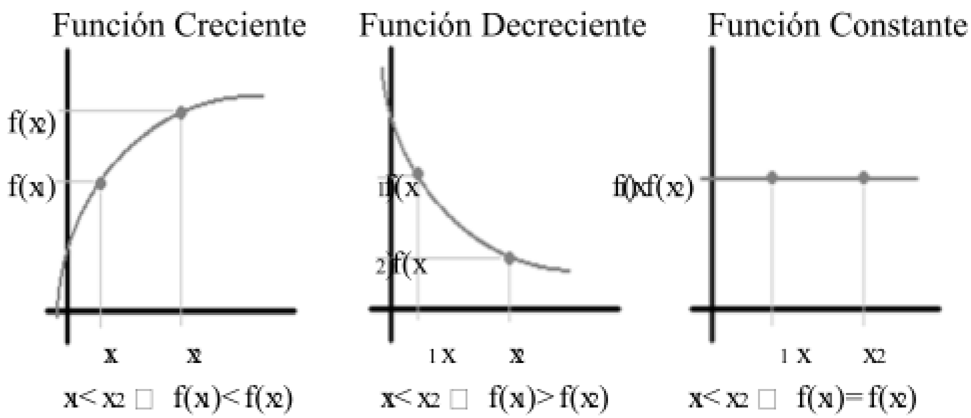
Función Creciente, Decreciente, Constante

Una función es creciente cuando al aumentar la variable x, también aumenta la variable y.

Una función es decreciente cuando al aumentar la variable x, la variable y disminuye.

Una función es constante, si al aumentar la variable x, la variable y se mantiene constante.

Una función puede presentar intervalos de crecimiento de decrecimiento y otros en los que sea constante.

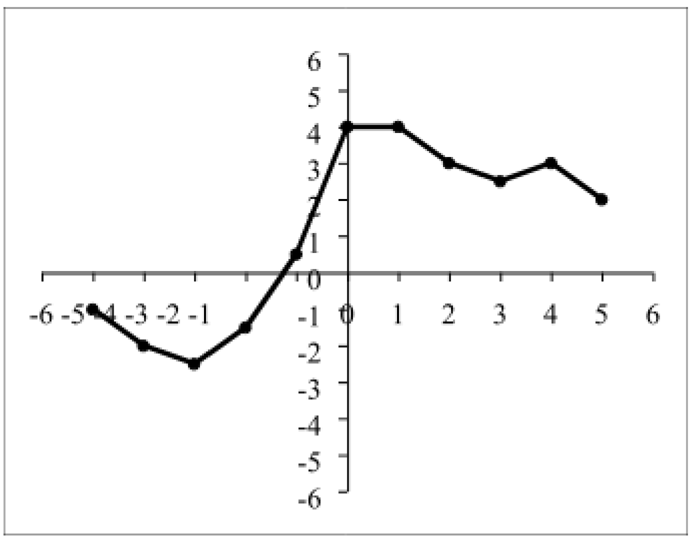


Máximos, Mínimos y Ceros de una Función

Los ceros o raíces de una función son los valores de x para los cuales se cumple que: f(x)=0. Gráficamente, son los puntos de la gráfica que intersectan al eje x.

El máximo relativo de una función es el punto donde la gráfica de la función pasa de ser creciente a ser decreciente.

El mínimo relativo de una función es el punto donde la gráfica de la función pasa de ser decreciente a ser creciente.



Funciones dadas por Fórmulas

Una función dada a través de una fórmula sirve para calcular cada valor de y a partir del correspondiente valor de x, donde x es la variable independiente e y la variable dependiente.

Se grafican, generalmente, mediante al elaboración de una tabla de valores.

Función Afín

La función polinómica de primer grado f(x)=a• x +b, siendo a y b números reales, se denomina función afín.

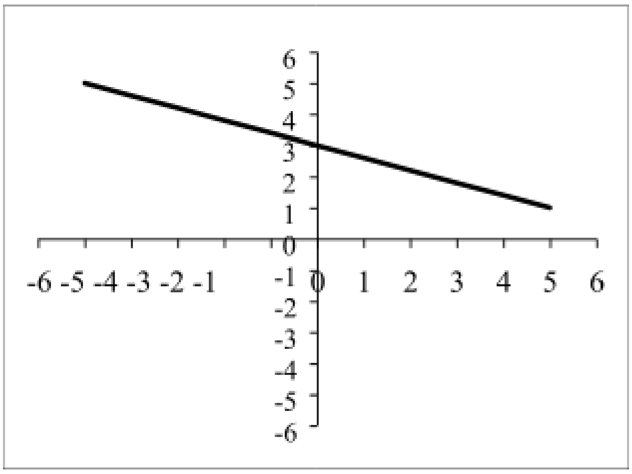
La representación gráfica de esta función es una recta. Si la recta pasa por el origen de coordenadas la función se denomina lineal. Si a=0, la función es constante.

“a”, se denomina pendiente de la recta, y es la inclinación de la recta respecto del eje x o el cociente entre la variación de y y x.

“b”, se denomina ordenada al origen, y es el punto de intersección de la recta con el eje y

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad b = f(0)$$

Representación Gráfica de la Función Afín



y = -2/5 x +3

a = -2/5

b = 3

Para representar ésta función de manera rápida se procede de la siguiente manera:

- Se ubica la ordenada al origen sobre el eje y.
- Luego a partir de éste punto se marca la pendiente, teniendo en cuenta la fracción equivalente a dicha pendiente. Si la pendiente es positiva, desde el punto del gráfico que representa a la “ordenada al origen”, ubicado sobre el eje “y”, se suben tantas unidades como indica el numerador de la pendiente y nos desplazamos a la derecha tantas unidades como indica el denominador de la pendiente, hallando en éste último un punto de la recta. Si la pendiente es de signo negativo, , desde el punto del gráfico que representa a la “ordenada al origen”, ubicado sobre el eje “y”, se bajan tantas unidades como indica el numerador de la pendiente y nos desplazamos a la derecha

tantas unidades como indica el denominador de la pendiente, hallando en éste último un punto de la recta.

- Este proceso se repite varias veces, obteniendo una sucesión de puntos que pertenecen al gráfico de la función afín
- Se unen todos estos puntos, obteniendo la representación gráfica de la función afín.

Función Cuadrática

La función polinómica de segundo grado $f(x)=a \cdot x^2+b \cdot x+c$,donde a, b y c números reales con $a \neq 0$, se denomina función cuadrática

a: coeficiente del término cuadrático b:
coeficiente del término lineal c: término
independiente

La representación gráfica de una función cuadrática es una curva que se denomina parábola, ésta curva es simétrica respecto de un eje que se denomina eje de simetría.

Representación Gráfica de la Parábola

Para facilitar la representación gráfica se utilizará:

- la ecuación del eje de simetría;

$$X_v = \frac{-b}{2a}$$ ecuación del eje de simetría

- las coordenadas del vértice

$V(x_v; f(x_v))$ coordenadas del vértice

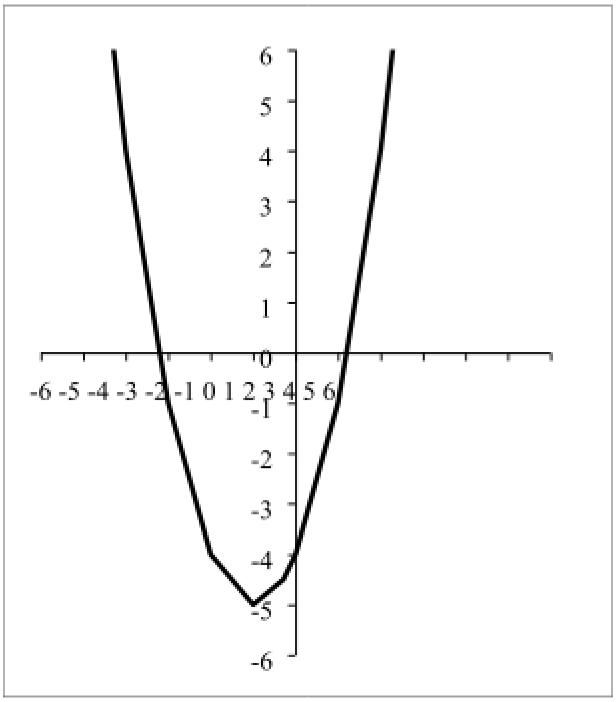
- las raíces se determinan resolviendo la ecuación de segundo grado, que se obtiene al hacer "y = 0"

- podemos realizar una tabla de valores, dando a la variable "x" valores simétricos respecto del x_v, ya que para ambos valore de "x", les corresponde el mismo valor de "y".

- el valor del término independiente "c" es la ordenada al origen.

- el valor de “a” indica:
  - si es positivo, las ramas de la parábola están orientadas en el sentido positivo del eje y
  - si es negativo, las ramas de la parábola están orientan en el sentido negativo del eje y

Ejemplo:



$f(x)= x^2 + 2x - 4$

a=1
b=2
c=– 4

$X_v = \frac{-2}{2.1} = -1$

$V(x_1; f(x_1)) =(-1;-5)$

$y= (-1)^2 + 2 . (-1) - 4$
$y=-5$

x	y
-1	-5
-2	-4
0	-4
- 3	-1
1	-1
- 4	4
2	4

Como vemos, a valores simétricos respecto de x_v , para ambos le corresponde la misma ordenada “y”

Los valores que toma x cuando y=0 se denominan “raíces o ceros de la función”. En ejes cartesianos corresponde a los puntos donde la gráfica de la función intersecta al eje x. Para calcular estos valores, debemos aplicar una fórmula en la que intervienen los coeficientes “a” , “b” y “c” de dicha función.

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

En ésta fórmula hay una raíz cuadrada, el radicando se denomina “DISCRIMINANTE”.

Discriminante

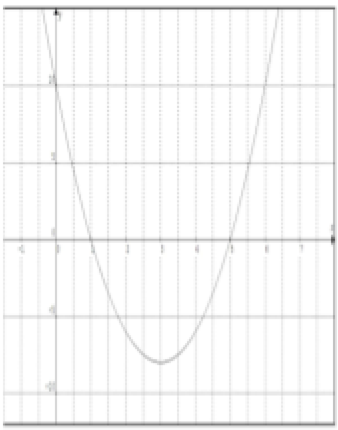
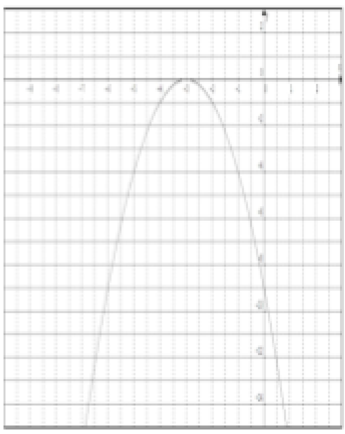
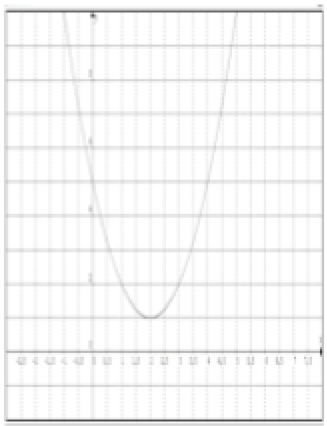
La expresión $b^2 - 4ac$ permite determinar el tipo de raíces que tiene la función cuadrática, por eso se denomina discriminante y se simboliza con la letra griega delta Δ

- Si $\Delta > 0$ la función tiene 2 raíces reales distintas y la gráfica intersecta al eje x en dos puntos.

- Si $\Delta = 0$ la función tiene 2 raíces reales iguales y la gráfica apoya su vértice sobre el eje x.
- Si $\Delta < 0$ la función tiene 2 raíces complejas conjugadas y la gráfica de la función no intersecta al eje x.

Ejemplos

a) $y = 2x^2 - 12x + 10$ b) $y = -x^2 - 6x - 9$ c) $y = x^2 - 4x + 1$

Expresión Polinómica, Canónica y Factorizada de la Función Cuadrática

$f(x)=a \cdot x^2+b \cdot x+c$

se desarrolla el cuadrado del binomio

el vértice

se busca se aplica

propiedad

distributiva las raíces

$f(x)=a \cdot (x- x_v)^2 + y_v$ $f(x)=a \cdot (x- x_1) \cdot (x - x_2)$

EJERCITACIÓN FUNCIONES PARTE A

I) Descubre las figuras ocultas, en un sistema de coordenadas cartesianas, marcando los puntos indicados y uniéndolos con un segmento. f_1: (6;1); (10;1); (6;4).

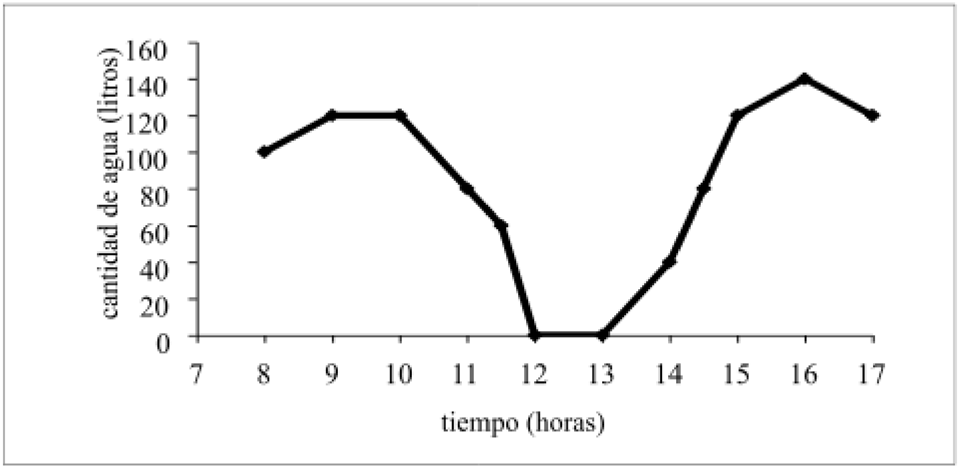
f_2: (2;1); (2;2); (3;1); (3;2). f_3:

(8;4); (6;7); (8;10); (10;7). f_4:

(5;3); (2;3); (2;9); (5;9).

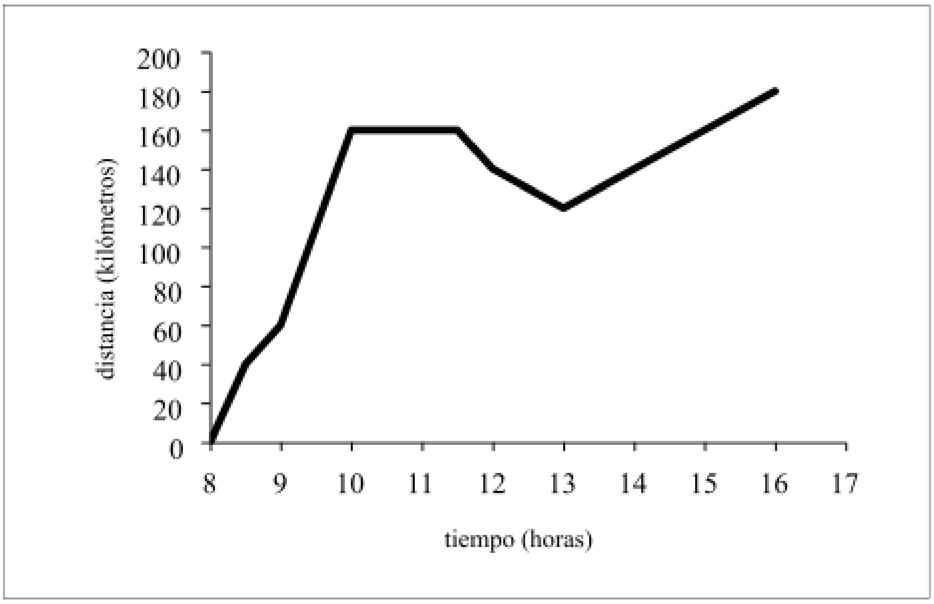
II) Dados los siguientes gráficos, responder.

1) El siguiente gráfico relaciona el tiempo con la cantidad de litros de agua que hay en tanque de una casa.



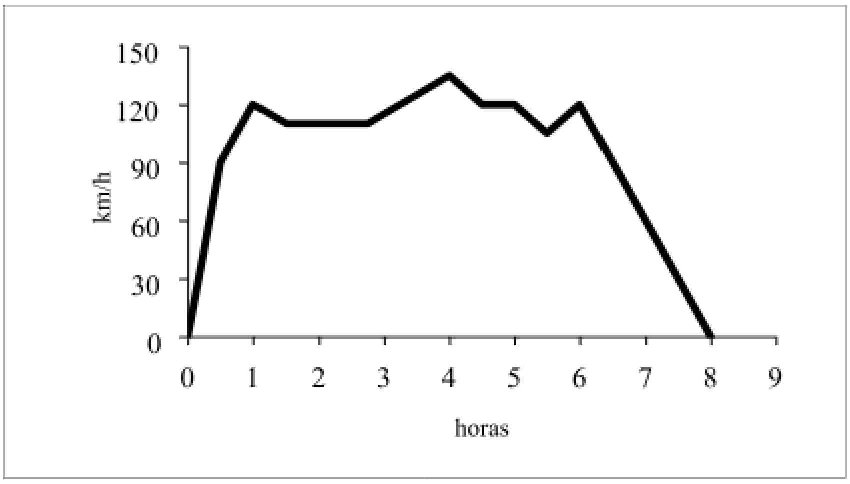
a) ¿Cuántos litros de agua había en el tanque a las 8 y a las 11:30?
b) ¿A qué hora había en el tanque: 140 y 80 litros?
c) ¿Durante cuánto tiempo salió agua del tanque?
d) ¿Durante cuánto tiempo ingresó agua al tanque?
e) ¿Cuánto tiempo estuvo el tanque vacío?
f) ¿En qué momento comenzó a llenarse de nuevo?

2) El siguiente gráfico muestra la distancia recorrida, en función del tiempo, por una persona que viaja en auto desde su casa, partiendo a las 8.



a) ¿A qué hora llegó a su destino? ¿a cuántos kilómetros distaba?
b) ¿Cuándo realizó una parada y cuánto tiempo estuvo detenido?
c) ¿A qué velocidad se desplazaba entre las 13 y las 15 horas?
d) ¿Entre qué horas viajó a mayor velocidad y cuál fue?
e) ¿Qué se interpreta que ocurrió entre las 11:30 y las 13 hs?

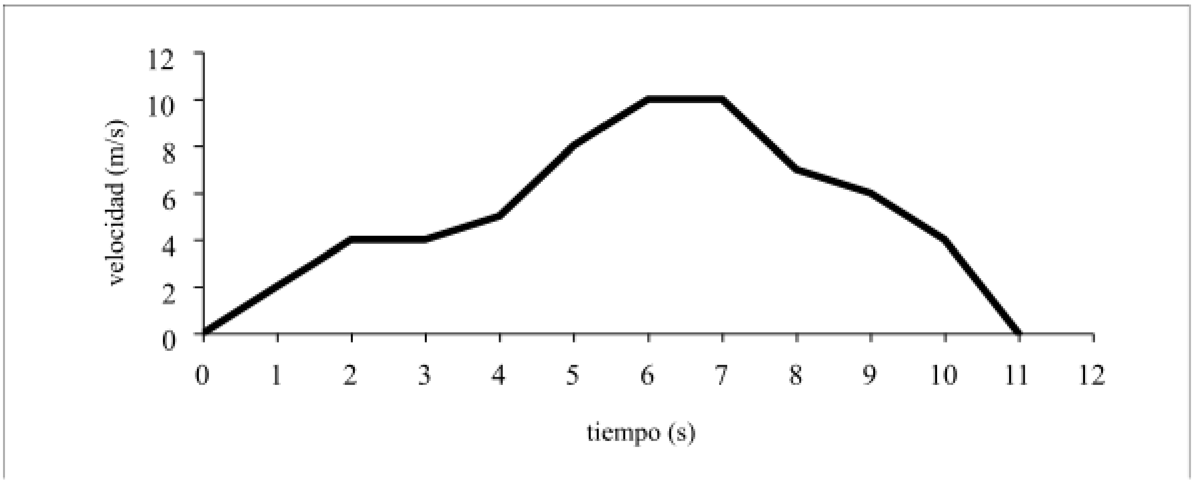
3) La situación representada en la gráfica se refiere al recorrido de un automóvil.



a) ¿Qué se representa en cada uno de los ejes?
b) ¿Qué velocidad tiene el automóvil en la tercera hora?
c) ¿Cuándo la velocidad del automóvil es de 90km/h? ¿en cuántas ocasiones?
d) ¿En cuánto tiempo realiza el recorrido completo?
e) ¿En cuántas ocasiones disminuye la velocidad?

f) ¿Qué otros datos puedes extraer del estudio de la gráfica?

4) Según la situación representada en la gráfica, indicar si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).



a) Cuando t=2s, la velocidad del móvil es 2m/s.

b) Durante los dos primeros segundos, la velocidad es la misma.

c) Entre 2s y 3s, la velocidad es constante.

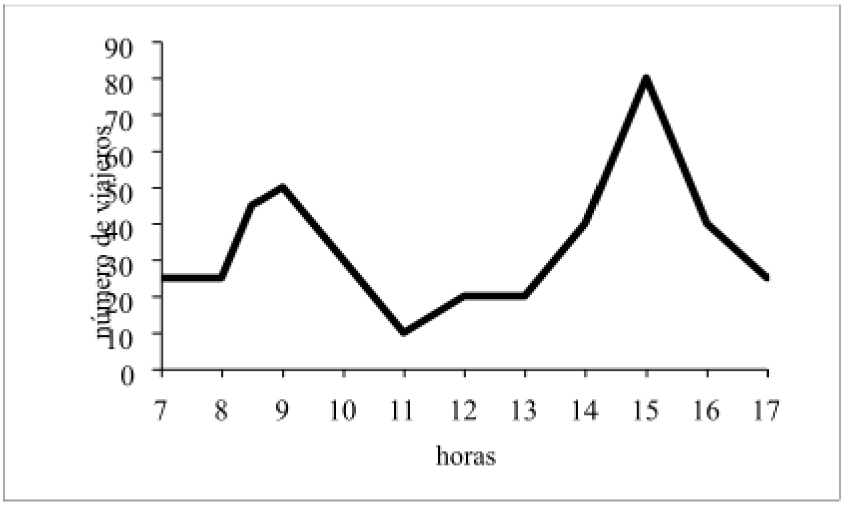
d) Entre t=8s y t=10s, la velocidad disminuye.

e) Cuando t=2,5s, el móvil está detenido.

f) Cuando t=6,3s, la velocidad es máxima.

g) Cuando t=11s, el móvil está circulando.

5) La gráfica representa la cantidad de personas en una parada de colectivo, en el centro de Mendoza, entre las 7 y las 17hs. Indica los intervalos en los que la función es creciente, decreciente y constante; y los puntos máximos y mínimos. Da una conclusión con respecto a lo observado.



III) Dados los siguientes enunciados, resuélvelos.

1) El número de latas de gaseosa vendidas a través de una máquina expendedora, está indicado por la siguiente tabla.

Hora	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Nº de latas	1	0	3	12	12	30	35	40	45	10

a) Representar estos datos gráficamente.
b) ¿Cuál es la hora de mayor consumo de gaseosas?
c) ¿Cuántas latas de gaseosa se han consumido hasta las 11?
d) Si la capacidad de la máquina es de 100 latas, ¿a qué hora se ha rellenado?
e) Esa tabla ¿puede representar una situación real? ¿por qué?

2) Un triángulo isósceles tien 14cm de perímetro. Si se denomina y a la base y x a los lados iguales:

a) Escribir una expresión algebraica que relacione y con x.
b) Elaborar una tabla y, a partir de ella, una gráfica de la relación establecida en a).
c) ¿Cómo es la función respecto al crecimiento?

3) En un local de revelado de fotografías, Miguel llevó a revelar un rollo de 36 fotos, allí le informaron que el costo total de las mismas se calcula así: $3 por el revelado, y $0,36 por cada copia que salga bien.

a) Encontrar una fórmula que relacione la cantidad de fotos x y el costo total c.

b) ¿Cuánto pagó Miguel si salieron 32 fotografías?

c) Malena pagó en el mismo negocio $15,24. ¿Cuántas fotos salieron?

d) Pablo llevó al mismo lugar un rollo, y le cobraron $14, cuando volvió a su casa, sin fijarse cuántas fotos habían salido, se dio cuenta de que le habían cobrado mal. ¿Cómo pudo detectar que había un error en su cuenta?

4) Se arroja hacia arriba, verticalmente, una pelota de tenis imprimiéndole una velocidad de 10m/s. La altura en metros sobre el suelo, t segundos después de haber sido lanzada, está dada por la función:

$$h(t)=10,5+10t-5t^2$$

a) ¿Desde qué altura fue lanzada la pelota de tenis?

b) Indicar en qué instante alcanza la altura máxima. Calcular dicha altura.

c) ¿Para cuáles valores de t asciende y para cuáles desciende?

d) Hallar el tiempo que demora en llegar al suelo.

5) Un grupo de biólogos estudia las características de un lago artificial en el que se introdujeron un cardumen para analizar su evolución. Al principio la colonia crece reproduciéndose normalmente, pero al cabo de algunos meses, unos peces mueren, debido al hacinamiento. Frente a la situación un científico plantea la siguiente ley de evolución:

$$n(x)=240+10x-0,1x^2$$

donde x son los días transcurridos, y n la cantidad de peces. a) ¿Cuántos peces se introdujeron al lago?

b) ¿Durante cuánto tiempo la cantidad de peces aumentó?

c) ¿Cuál fue la cantidad máxima que hubo, y en qué momento?

d) ¿Cuándo se extinguirá la población?

IV) Dadas las siguientes funciones f: .

a) Representarlas gráficamente.

b) Clasificarlas en: afín, cuadrática; creciente, decreciente o constante.

c) Indicar, si existen, mínimos y máximos.

d) Hallar los ceros o raíces e indicarlos.

1) $f(x)=3/7x+5$

2) $f(x)=-3/4$

3) $f(x)=-2x^2+5$

4) $f(x)=-8/5x+6$ 5) $f(x)=-3x^2-6x$

6) $f(x)=7/4x$

7) $f(x)=(x-2)^2-5$

8) $f(x)=-3/2x-7/2$ 9) $f(x)=x$

10) $f(x)=2x^2-4x+1$

EJERCITACIÓN FUNCIÓN AFIN PARTE B

Ejercicio Nº1

El punto (-3, 0) está situado:
a- Sobre el eje de abscisas. b-
Sobre el eje de ordenadas c- En
ninguno de los dos

Ejercicio Nº2

El punto (0,2) esta situado: a-
Sobre el eje de abscisas. b-
Sobre el eje de ordenadas c- En
el tercer cuadrante

Ejercicio Nº3

Entre las ecuaciones siguientes, ¿Cuál no representa una recta?

a- $x = 1 + y$
b- $x = -1$ c- x
$=1/y$

Ejercicio Nº4

La recta de ecuación $y= -3x + 1$ tiene pendiente igual a:

a- 1
b- -3

c- -2

Ejercicio Nº5

La recta de ecuación $y = 2x – 3$ tiene por ordenada en el origen:

a- 3
b- 2
c-
-
3

Ejercicio Nº6

La ecuación $x = 4$ representa a:
a- Una recta paralela al eje de abscisas b- Una
recta paralela al eje de ordenadas a- No
representa una recta

Ejercicio Nº7

¿Cuál de las rectas siguientes tiene mayor pendiente?

a- 2 y = x – 1 b- 3
y = x + 1 c- 4 y =
x – 6

Ejercicio Nº8

La ecuación y = -7 representa a:

a- Una recta paralela al eje de abscisas b- Una
recta paralela al eje de ordenadas c- Un punto

Ejercicio Nº9

¿Cuál de las siguientes rectas tiene pendiente negativa?

a- 3 x + 2 y – 4 = 0
b- 2 x – y + 1 = 0 c- y
+ 2 = 0

Ejercicio Nº10

La ecuación de la recta de pendiente -5 y ordenada en el origen 2 es:

a- y = 2 x – 5 b- y
= - 5 x + 2 c- y =
5_x – 2

Ejercicio Nº11

¿Por cual de los siguientes puntos no pasa la recta 2_x – y – 4 = 0?

a- (-1, - 5) b-
(1, - 2) c- (-
2, - 8)

Ejercicio Nº12

La recta que pasa por los puntos (-1, 2) y (2, 3) tiene pendiente igual a:

a- 1/3
b- 1 c-
7/3

Ejercicio Nº13

¿Cuál de las siguientes rectas no es paralela a las otras dos?

a- y = _ x –
b- 3 x - 4 y + 2 = 0 c- 8 x – 6 y – 3 = 0

Ejercicio Nº14

¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta y = -2_x + 3?

a- y = 2 x – 1 b- x
+ 2 y + 1 = 0 c- y
= _ $x - 2$

Ejercicio Nº15

El punto de abscisa 3 que pertenece a la recta y = 2_x – 6 tiene ordenada:

a- 4.5 b-
0
c- No puede calcularse

Ejercicio Nº16

Las rectas y = 3 x – 2 y 3 x - y + 5 = 0 son:

a- Paralelas b-
Perpendiculares
c- No son ni paralelas ni perpendiculares

EJERCITACION FUNCIÓN CUADRÁTICA PARTE B

Ejercicio Nº1

Exprese en forma canónica:

a- y = x^2-2x+3/4 b- y
= 5x^2+10x-1 c- y =
x^2+x-12

Ejercicio Nº2

Exprese en forma factorial:

a- y = x^2-12x+32 b-
y = 2x^2- 5x-3 c- y =
x^2+1/2 x-1/2

Ejercicio Nº3

Averiguar cuáles de las siguientes funciones admiten máximo y cuáles mínimo sin hacer cálculos: a- y = x^2+ 6x+8 b- y = x^2- 12x-5 c- y = -x^2+8 x+6